Chap 6 – Nombres complexes

I. Définitions - Propriété

<u>Définition</u>
Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes qui vérifie les propriétés suivantes :
• $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
• l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celle de $\mathbb{R}$ et les règles de calcul restent les mêmes
• Le nombre complexe i est tel que $i^2 = -1$
• Un nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $a + ib$; $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

<u>Définition</u> :
On dit que a + bi est la forme algébrique du nombre complexe z.
a est la partie réelle de z, on note $a = \mathrm{Re}(z)$
b est la partie imaginaire de z, on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

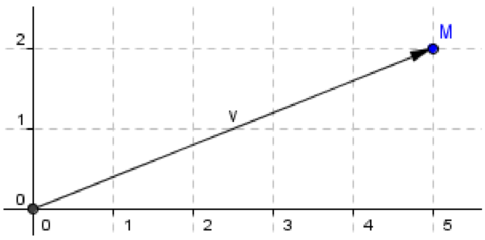
<u>Définition</u> :
Les complexes de la forme bi avec $b \in$ IR, sont appelés imaginaires purs.

<u>Propriété :</u>
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

II. Représentation graphique, sommes et conjugués

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, au nombre complexe $= a + ib$, on peut associer le point M(a ; b) ou le vecteur $\vec{\mathrm{v}}$(a ; b).

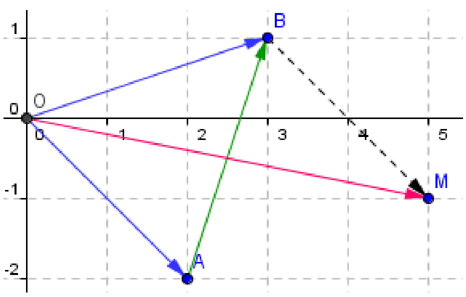
- L'axe des **abscisses** est appelé l'axe des **réels**
- L'axe des **ordonnées** est appelé l'axe des **imaginaires**.
- $z = a + b$i est **l'affixe** de M et de $\vec{\mathrm{v}}$.
- M(a ; b) est **l'image** ponctuelle, $\vec{\mathrm{v}}$(a ; b) est l'image vectorielle de $z = a + ib$.



Exemple :
si on a = 5 + 2i , alors ce complexe est l'affixe du point M(5 ;2) et du vecteur $\vec{v}(5; 2)$

Remarque :
en général on notera z_M l'affixe de M, et $z_{\vec{v}}$ celle de $\vec{v}$

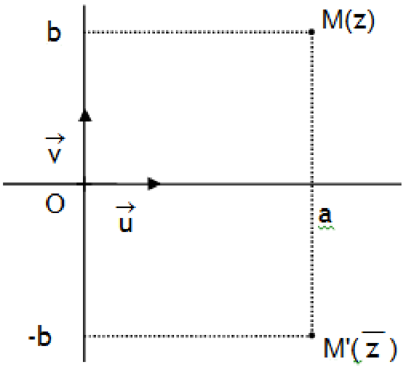
Si A est d'affixe $z = a + ib$ et si B a pour affixe $z' = a' + ib'$, alors $z_{\overrightarrow{AB}} = z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$



ici $z_A = 2 - 2$ et $z_B = 3 + i$ M est le point d'affixe $z_M = z_A + z_B$
Dans ce cas $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

En vert on peut voir le vecteur $\overrightarrow{AB}$
D'après la relation de chasles on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
On remarquera la correspondance $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = z_{\overrightarrow{OB}} - z_{\overrightarrow{OA}}$

- le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \frac{z+z'}{2}$



• On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$

Proriétés : $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$

Si z' # 0 $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

z est réel $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$ z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = -\overline{z}$

III. Equation du second degré à coefficients réels

L'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation

- si $\Delta \geq 0$, les deux solutions sont réelles z_1 et z_2 (si le discriminant est nul les deux solutions sont égales)
- si $\Delta < 0$, on peut écrire $\Delta = (i\delta)^2$ avec $\delta \in \mathbb{R}$,

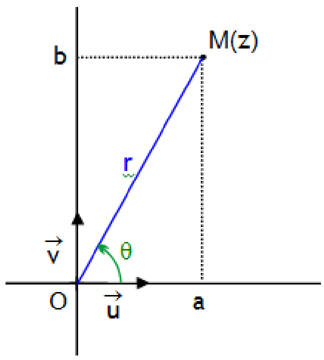
les deux solutions sont alors des nombres complexes, (conjugués l'un de l'autre) :

$z_1 = \frac{-b-i\delta}{2a}$ $z_2 = \frac{-b+i\delta}{2a}$

• Le trinôme $az^2 + bz + c$ se factorise sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$

IV. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+^*$
C'est la forme trigonométrique de z.
r est le module de z, on le note $|z|$ et il vaut $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
θ est un argument de z.



Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors
• $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$
• $-z = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$
• $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

1) Module d'un nombre complexe

Propriétés : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|-z| = |z|$; $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$|zz'| = |z|.|z'|$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Propriétés (module et conjugués) :

$\overline{\overline{z}} = z$ $\qquad$ $|\overline{z}| = |z|$ $\qquad$ Si $z \neq 0$ $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

$z.\overline{z} = |z|^2$ (donc $z.\overline{z}$ est un réel positif) $\qquad$ $z.\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors OM = |z| et MM' = |z' - z|
Si $\vec{u}$ a pour affixe z , alors $\|\vec{u}\| = |z|$.

2) Argument d'un nombre complexe

L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique, il est défini modulo 2π.
Si θ est un argument de z, on notera $\arg z = \theta\ [2\pi]$ ou $\arg z = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
On appelle argument principal de z l'argument de z appartenant à $]-\pi ; \pi]$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\qquad z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg z' \quad [2\pi] \end{cases}$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z'
On a alors $(\vec{I},\vec{u}) = \arg z \quad [2\pi]$
$(\vec{u},\vec{u'}) = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$

z et z' étant deux nombres complexes non nuls on a :

- $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$; $\qquad \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$; $\qquad \arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$; $\qquad \arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

V. Notation exponentielle

On note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r.e^{i\theta}$

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\quad \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\quad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Formule de MOIVRE : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Formules d'EULER : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$

Exemples :
Linéarisation de $\sin^2 x$ et de $\cos^3 x$
Formules d'addition et de duplication : $\cos(a+b)$ et $\sin(2a)$

VI. Utilisation des complexes en géométrie

La notion de distance correspond au module - La notion d'angle à l'argument.

A, B et C étant trois points distincts d'affixes z_A, z_B et z_C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$,
- **AB = $|z_B - z_A|$**
- l'angle $(\vec{i};\overrightarrow{AB})$ a pour mesure $arg(z_B - z_A)$ $[2\pi]$
- **l'angle ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$)** a pour mesure $arg(z_C - z_A) - arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$
  $\Leftrightarrow$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \in \mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0$ $[\pi]$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$
  $\Leftrightarrow$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$

Nombres Complexes et Transformation (hors programme)

<u>Translation</u> : soit une translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ d'affixe *a* ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (d'affixe z') tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{U}$ donc z' - z = *a* d'où **l'expression complexe d'une translation est : z' = z + *a*** ; où *a* est l'affixe du vecteur de translation.

<u>Homothétie</u> : soit une homothétie de raport *k* et de centre Ω d'affixe ω ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (d'affixe z') tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ donc z' - ω = k(z - ω) d'où **l'expression complexe d'une homothétie est : z' - ω = k(z - ω)** ;
où ω est l'affixe du centre et *k* le rapport de cette homothétie.

<u>Rotation</u> : soit une rotation d'angle θ et de centre Ω d'affixe ω ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (affixe z') tel que : l'angle ($\overrightarrow{\Omega M}$, $\overrightarrow{\Omega M'}$) = θ donc $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ d'où **l'expression complexe d'une rotation est : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$** ;
où ω est l'affixe du centre et θ l'angle de cette rotation.

L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z e^{i\theta}$
où θ est un nombre réel fixé, est la rotation de centre O et d'angle θ.

• Le cercle de centre A d'affixe z_A et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z - z_A| = r$