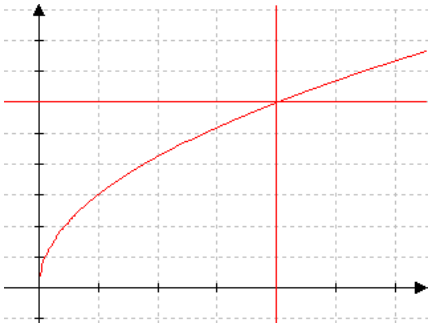
Chap 3 – Limites et continuité

On étudie la limite des fonctions en toute borne de l'intervalle de définition d'une fonction *f*.

Exemple : pour $f(x) = \frac{1}{x}$, on étudie les limites de la fonction inverse en + ∞, en - ∞, et en 0 à gauche et à droite.

I . Limites :

1. Limites en l'infini:

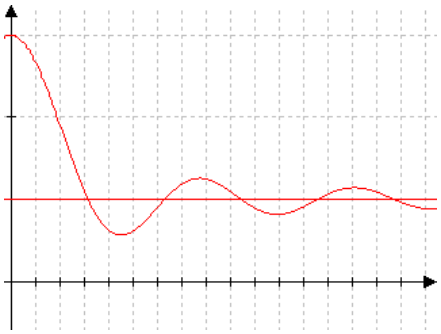


Définition 1: Soit *f* une fonction définie sur un intervalle [*a*;+∞ [. Si tout intervalle du type]A ; +∞[contient toutes les valeurs de *f*(*x*) dès que *x* est assez grand, alors on dit que ***f*(*x*) tend vers + ∞ lorsque *x* tend vers + ∞** .

On écrit ……..

Le graphique montre que pour tout réel A > 0, il existe un réel α > 0 tel que si *x* > α, alors *f*(*x*) > A.

On définit de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.



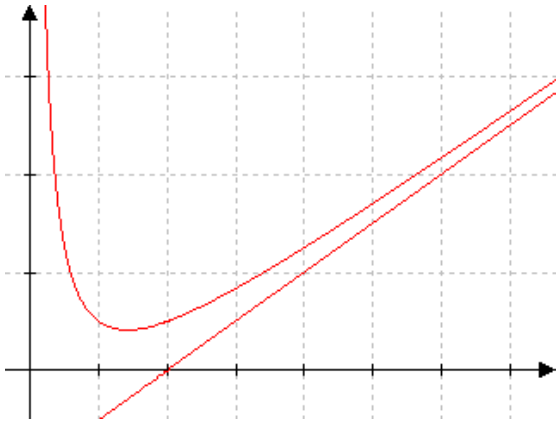
Exemple 1 : $f(x) = 3x^2 - 1$: donner sa limite en +∞ et -∞.

Définition 2 : Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de *f*(*x*) pour *x* assez grand, alors on dit que *f*(*x*) tend vers le réel L lorsque *x* tend vers + ∞ . On écrit…….

On dit que la droite d'équation *y* = L est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en + ∞.

On définit de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$: on dit alors que la droite d'équation *y* = L est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en - ∞.

Exemple 2 : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots$



Définition 3: Soit $a \neq 0$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe C_f en + ∞ (ou en - ∞) lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$. (ou $\lim\limits_{x \to -\infty}$)

Cas particulier : les fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, où $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$; possèdent une asymptote oblique d'équation y = *ax* + *b*.

C'est la distance verticale entre la courbe et la droite asymptote qui tend vers 0 lorsque *x* tend vers + ∞.

Exemple 3: $f(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2}$ *a-t-elle une asymptote oblique en + ∞ ?* ……..

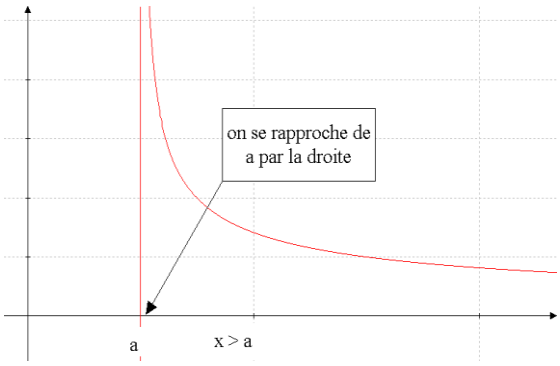
……..

2. Limite infinie en un réel *a* :

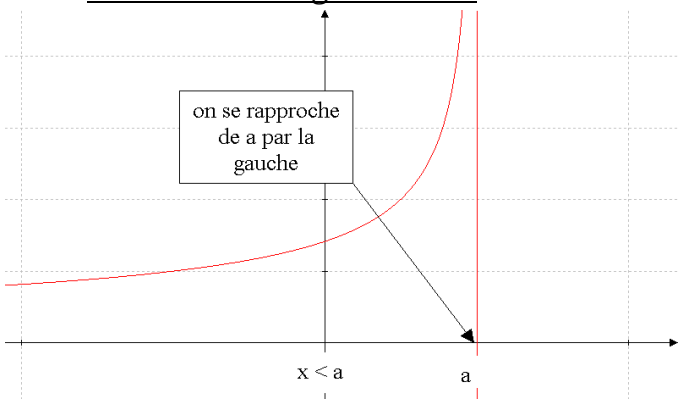
Définition 4 : Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle]*a* ; *a* +h[, où h >0. Si *f*(*x*) tend vers + ∞ lorsque *x* tend vers *a* en restant plus grand que *a*, on dit que +∞ est **la limite à droite de *f* en *a*** et on note …… ou .....

Définition 5 : Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle]*a* -h; *a* [, où h >0. Si *f*(*x*) tend vers + ∞ lorsque *x* tend vers *a* en restant plus petit que *a*, on dit que +∞ est **la limite à gauche de *f* en *a*** et on note …….. ou .....

Limite infinie à droite en *a*:



Limite infinie à gauche en *a* :



On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe en +∞. (De même en - ∞).

Exemples : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \ldots$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \ldots.$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \ldots$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \ldots$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ldots$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ldots$ $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \ldots.$ $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \ldots$

3.Opérations sur les limites :

a)Limite de *f* + *g* :

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x = \ldots$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x + 3 = \ldots$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} + 2 = \ldots$

Règles générales :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x)$
L	L'	
L	+∞	
L	–∞	
+∞	+∞	
-∞	–∞	
+∞	–∞	

Une forme indéterminée est une limite qu'on ne peut pas déterminer avec les règles de calcul. Pour la calculer il faut transformer l'expression. La réponse sera différente selon les situations (il se peut aussi que la limite n'existe pas).

b) Limite de f × g :

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x} = \ldots$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x(3 - x) = \ldots$

Règles générales :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x)$
L	L'	
L > 0	+∞	
L < 0	+∞	
+∞	+∞	
-∞	–∞	
0	+ ∞ ou –∞	

Exercices : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + \sqrt{x} = \ldots$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x\,(3+ \frac{1}{x}) = \ldots$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\sqrt{x} = \ldots$ $\lim\limits_{x \to 0} 2x\,(3+ \frac{1}{x}) = \ldots$

c) **Limite de $\frac{f}{g}$** :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	L' $\neq 0$	
L (même L=0)	$+\infty$ ou $-\infty$	
L > 0	0 avec $g(x) < 0$	
L < 0	0 avec $g(x) > 0$	
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	
0	0	

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = \ldots$

(asymptote …….. d'équation …….)

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = \ldots$ *(asymptote …….. d'équation …….)*

Règles générales :

Méthodes pour lever l'indéterminée :

- pour les formes du type $\infty \div \infty$: on met le terme de plus haut degré en facteur
- **pour les polynômes ou quotients de polynômes : règle des termes de plus haut degré**
- pour les expressions comportant des racines carrées : on utilise la quantité conjuguée.

Exemple 4 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^5 + 2x^2 - 3}{6x^4 - 2} =$ …….

…….

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} =$ …….

4. Limite de la composée de deux fonctions :

Théorème 1: (admis) $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et que $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} gof(x) = c$.

Remarque : on peut aussi remplacer a, b, c par $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 5: $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ *définie sur]2 ; +∞[et* $g(x) = \sqrt{x}$. *Donner la limite en +∞ de gof.*

5. Théorèmes de comparaison :

Théorème 2: *Théorème des gendarmes (ou d'encadrement) :* a est soit un réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$. $L \in \mathbb{R}$.
Si au voisinage de a, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ **et** si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ **alors** $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Démonstration :(dans le cas où $a = +\infty$)

Exemple 6 : Appliquer ce théorème pour déterminer la limite de $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ *en +∞.*

Théorème 3 : (admis) *de comparaison :*
Soient f et g deux fonctions vérifiant sur un intervalle [A ; +∞[, $f(x) \leq g(x)$.

- si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Exemple 7 : En comparant les fonctions f(x) = x + sin(x) et g(x) = x – 1, donner la limite de f(x) en +∞. Comment déterminer la limite de f(x) en -∞ ?

II. Continuité :

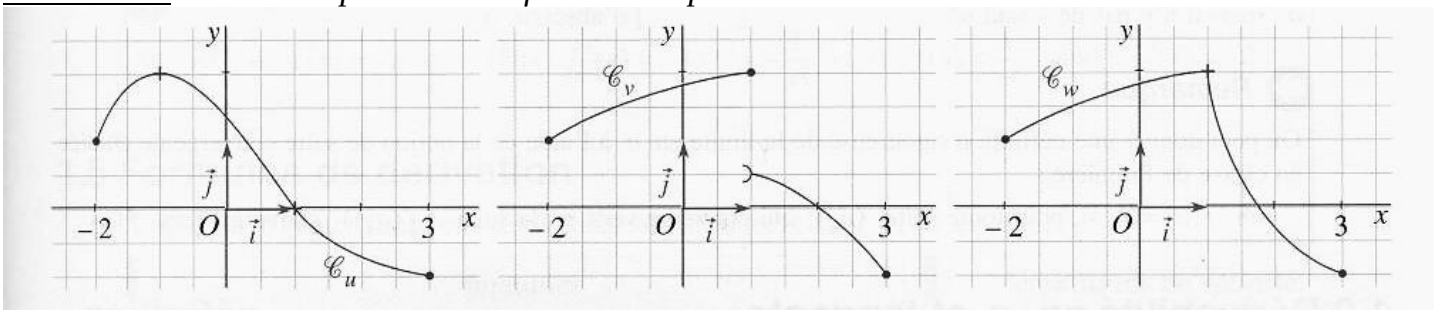
Notion introduite par Cauchy en 1821 dans son Cours d'analyse. Ce traité fonde l'analyse moderne.

1.Définition :

Définition 6: Soit f une fonction définie dans un intervalle I et $a \in$ I. On dit que f est **continue** en a ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. (éventuellement la limite en un seul coté si a est une borne de I).

Exercice 8 : La fonction $x \longrightarrow x^2 + 2x - 0{,}5$ est –t-elle continue en 1 ?.....

Exercice 9 : Y a-t-il des points où les fonctions représentées ci-dessous sont discontinues ?



……

……

Définition 7: *f* est **continue** sur l'intervalle I ssi *f* est continue en tout point de I.

Remarques : graphiquement cela signifie que l'on peut tracer la courbe représentative de *f* sans lever le crayon. **Dans un tableau de variations, on représente le fait qu'une fonction est continue et strictement monotone en traçant une flèche sans coupure**.

Propriété 4 : Si une fonction est dérivable sur I, alors elle sera continue sur I.
Conséquence : les fonctions polynômes, trigonométriques et racines carrées, ainsi que toute fonction construite à partir de ces fonctions par addition, multiplication, division ou composition, sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Exercice 10: Dresser le tableau de variations de la fonction $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Par convention, il donne deux intervalles où la fonction est continue, lesquels ?

2. Une fonction définie sur ℝ présentant des discontinuités : « partie entière »

Définition 8: La **partie entière** du réel *x*, notée **E(*x*)**, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à *x* : **E(*x*) ≤ *x* < E(*x*) + 1**. La fonction **E :*x* ⟶ E(*x*)** s'appelle la fonction **partie entière**.

E(0) = …. E(0,15) = … E(0,99) = …. E(1) = … E(1,001) = …. E(-1) = ….

E(-0,4) = … car ……. E(-0,0001)= ….. Résoudre E(*x*) = 2 : *S* = ……..

Représenter graphiquement la fonction E sur [-1 ; 3] :

Etudier la continuité de E en 1, puis sur [0 ; 1], puis sur tout intervalle [*n* ; *n* + 1] où *n* ∈ Z.

III. Théorème des valeurs intermédiaires:

Théorème 5: *théorème des valeurs intermédiaires (admis)*
Soit *f* une fonction définie et **continue** sur un intervalle I, *a* et *b* deux réels de I. Pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), il existe **au moins** un réel α entre *a* et *b* tel que *f*(α) = *k*.

Corollaire 6 : *théorème de la bijection*
Si la fonction f est de plus **strictement monotone sur [*a* ;*b*]** alors le réel α est **unique.**

Remarques : f est alors dite *bijective sur [a ; b]*.
α est **la** solution de l'équation $f(x) = k$: *α est l'unique antécédent de k.*
Démonstration :

Propriété 7 : *extension du théorème de la bijection* : *l'intervalle peut ne pas être borné ni fermé:*
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a ; b[$, ***b* étant un nombre ou +∞**
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, il existe un **unique** réel α entre a et b tel que $f(\alpha) = k$.

Remarque : on peut remplacer $[a ; b]$ par tout intervalle ouvert : $]a ; b[$, semi-ouvert $]a ; b]$, non borné : $[a ; +\infty[$ ou $]-\infty ; b]$ par exemple, ou même $\mathbb{R}$ si la fonction est strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}$.
Exercice 11 : Quel est le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ dans l'intervalle [-2 ; 4] ?

IV. Applications du théorème des valeurs intermédiaires :

1.Approximation d'une solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a ; b]$:

Méthode par dichotomie : *(du grec « couper en deux »)*

On sait que α est entre a et b. Choisir $m = \dfrac{a + b}{2}$ et calculer $f(m)$. En déduire grâce à son signe si m est plus petit ou plus grand que α.
- Si α est entre m et b, choisir $[m ; b]$ comme nouvel intervalle.
- Si α est entre a et m, choisir $[a ; m]$ comme nouvel intervalle.

Recommencer l'opération jusqu'à avoir un encadrement de α assez petit.

Exercice 12 : Donner un encadrement à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ dans l'intervalle [0 ; 4].

2.Les fonctions racine $n^{\text{ième}}$: $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$ (n entier, $n \geq 2$)

Sur $[0 ; +\infty[$: La fonction $f : x \longrightarrow x^n$ est continue et strictement croissante (car.....……..).
De plus $f(0) =$ ….. et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^n) =$ ….. .
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$ l'équation $\boldsymbol{x^n = a}$ possède une unique solution positive notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$
(se lit « racine $n^{\text{ième}}$ de a »).
Remarque : la racine deuxième de a est la racine carrée habituelle $\sqrt{a}$.

Exemple 13: $\sqrt[3]{8} =$ ..... ; $32^{\frac{1}{5}} =$ .... ; $\sqrt[4]{3} \approx$ ..... (à la calculatrice).

Propriété 8: Pour tous réels positifs a et b, $b^n = a$ équivaut à $\sqrt[n]{a} = b$. La fonction $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$ s'appelle fonction racine $n^{\text{ième}}$. Elle est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Exercice 14 : Représenter graphiquement les fonctions $x \longrightarrow x^3$; $x \longrightarrow x$ et $x \longrightarrow \sqrt[3]{x}$.
Propriété 9 : *Règles de calcul :*

- $x^{\frac{a}{b}}$ est la racine $b^{\text{ième}}$ de x à la puissance a : on définit ainsi des exposants rationnels.
- les règles de calcul des exposants entiers s'étendent toutes aux exposants rationnels.

Exercice 15 : Calculer $4^{\frac{3}{2}}$. Simplifier l'expression $(\sqrt{2})^{\frac{2}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}}$.

Corollaire 6 : *théorème de la bijection*
Si la fonction f est de plus **strictement monotone sur [*a ;b*]** alors le réel α est **unique.**

Remarques : f est alors dite *bijective sur [a ; b]*.
α est **la** solution de l'équation $f(x) = k$: *α est l'unique antécédent de k.*
Démonstration :

Propriété 7 : *extension du théorème de la bijection* : *l'intervalle peut ne pas être borné ni fermé:*
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a ; b[$, ***b* étant un nombre ou +∞**
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, il existe un **unique** réel α entre a et b tel que $f(\alpha) = k$.

Remarque : on peut remplacer $[a ; b]$ par tout intervalle ouvert : $]a ; b[$, semi-ouvert $]a ; b]$, non borné : $[a ; +\infty[$ ou $]-\infty ; b]$ par exemple, ou même $\mathbb{R}$ si la fonction est strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}$.
Exercice 11 : Quel est le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ dans l'intervalle [-2 ; 4] ?

IV. Applications du théorème des valeurs intermédiaires :

1.Approximation d'une solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a ; b]$:

Méthode par dichotomie : *(du grec « couper en deux »)*

On sait que α est entre a et b. Choisir $m = \dfrac{a + b}{2}$ et calculer $f(m)$. En déduire grâce à son signe si m est plus petit ou plus grand que α.
- Si α est entre m et b, choisir $[m ; b]$ comme nouvel intervalle.
- Si α est entre a et m, choisir $[a ; m]$ comme nouvel intervalle.

Recommencer l'opération jusqu'à avoir un encadrement de α assez petit.

Exercice 12 : Donner un encadrement à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ dans l'intervalle [0 ; 4].

2.Les fonctions racine $n^{\text{ième}}$: $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$ (n entier, $n \geq 2$)

Sur $[0 ; +\infty[$: La fonction $f : x \longrightarrow x^n$ est continue et strictement croissante (car.....……..).
De plus $f(0) =$ ….. et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^n) =$ ….. .
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$ l'équation $\boldsymbol{x^n = a}$ possède une unique solution positive notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$ (se lit « racine $n^{\text{ième}}$ de a »).
Remarque : la racine deuxième de a est la racine carrée habituelle $\sqrt{a}$.

Exemple 13: $\sqrt[3]{8} =$ ..... ; $32^{\frac{1}{5}} =$ .... ; $\sqrt[4]{3} \approx$ ..... (à la calculatrice).

Propriété 8: Pour tous réels positifs a et b, $b^n = a$ équivaut à $\sqrt[n]{a} = b$. La fonction $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$ s'appelle fonction racine $n^{\text{ième}}$. Elle est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Exercice 14 : Représenter graphiquement les fonctions $x \longrightarrow x^3$; $x \longrightarrow x$ et $x \longrightarrow \sqrt[3]{x}$.
Propriété 9 : *Règles de calcul :*

- $x^{\frac{a}{b}}$ est la racine $b^{\text{ième}}$ de x à la puissance a : on définit ainsi des exposants rationnels.
- les règles de calcul des exposants entiers s'étendent toutes aux exposant rationnels.

Exercice 15 : Calculer $4^{\frac{3}{2}}$. Simplifier l'expression $(\sqrt{2})^{\frac{2}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}}$.