Devoir maison

113P45

1) $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{3}{4}$
   $u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $u_1 - u_0 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ la suite n'est donc pas arithmétique.
   $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$ et $\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$ donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ donc la suite n'est pas géométrique.
2) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
   $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ quand on compare ceci avec v_n on se rend compte que c'en est la moitié : $\frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$
   Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$, donc $v_n = \frac{1}{2^n}$
3) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$
   $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{2v_n + u_n}{v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$ la suite est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme -1 et donc $w_n = -1 + 2n$
4) $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ donc $u_n = w_n v_n = (-1 + 2n)\frac{1}{2^n} = \frac{-1+2n}{2^n}$
5) Soit P_n la proposition « $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ »,
   Initialisation :
   pour n=0 $\quad S_n = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2n+3}{2^n} = 2 - \frac{3}{1} = -1$
   Hérédité
   Soit k tel que P_k soit vrai, $S_{k+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_k + u_{k+1} = S_k + u_{k+1}$
   $= 2 - \frac{2k+3}{2^k} + \frac{-1+2(k+1)}{2^{k+1}} = 2 - \frac{4k+6}{2^{k+1}} + \frac{-1+2(k+1)}{2^{k+1}} = 2 + \frac{-4k-6-1+2(k+1)}{2^{k+1}}$
   $= 2 + \frac{-2k-5}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2k+5}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}$ d'où l'hérédité
   pour avoir l'idée de la dernière étape il fallait écrire l'objectif en bas de la rédaction avant même de se lancer, ça permettait d'avoir une idée claire de la direction à suivre.
   Conclusion
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{S_n} = 2 - \frac{2\mathrm{n}+3}{2^\mathrm{n}}$

Exercice 98P40

1)a) $u_1 = 12000 \times 1{,}05 = 12600$
b) $u_n = 12\,000 \times 1{,}05^n \qquad u_8 = 12\,000 \times 1{,}05^8 \approx 17\,729{,}47$
c) Il s'agit de la somme des 9 premiers termes d'une suite géométrique. A l'issue de 9 ans de contrat il paye
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_8 = 12\,000\frac{1{,}05^9 - 1}{1{,}05 - 1} = 12\,000\frac{1{,}05^9 - 1}{0{,}05}$
$= 240\,000(1{,}05^5 - 1) \approx 132\,318{,}77$
2) a) $v_1 = 12\,000 + 750 = 12\,750$
b) $v_8 = 12\,000 + 750 \times n$ et $v_8 = 12\,000 + 750 \times 8 = 18\,000$
c) Il s'agit de la somme des 9 premiers termes d'une suite arithmétique. A l'issue de 9 ans de contrat il paye
$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_8 = \frac{(v_0 + v_8)9}{2} = \frac{(12000+18000)9}{2} = 30\,000 \times \frac{9}{2} = 135\,000$
3) le contrat le plus avantageux est le premier, ce qui n'est pas une grande surprise vu que tous les ans le loyer était moins cher pour la première formule.

Exercice 100P40

1a) **initialisation** : soit $n = 3$

Calculons u_3 pour cela on doit calculer les termes précédents :

$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = \frac{-1}{2}$ $\qquad$ $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 = \frac{-1}{4}$

Et $\quad u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1 = \frac{-1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$

Hérédité

Soit $k \geq 3$ tel que $u_k \geq 0$,

$u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + k - 1$ or $u_k \geq 0$ donc $\frac{1}{2}u_k \geq 0$ et $k \geq 3$ donc $k - 1 \geq 0$

On a donc : $\frac{1}{2}u_k + k - 1 \geq 0$, l'hérédité est donc vraie

Conclusion

Donc $\forall n \geq 3, u_n \geq 0$

b) Prompt M : $0 \rightarrow N$: $1 \rightarrow U$: While U<M : $N + 1 \rightarrow N$: $\frac{1}{2}U + N - 1 \rightarrow U$: End : Disp N

plus les valeurs de M sont grandes plus celles de n le seront aussi, mais à chaque fois la calculatrice finit par trouver un rang pour lequel la suite dépasse le seuil M.

c) Ceci nous amène à conjecturer que la suite n'est pas majorée, et sans doute même plus elle pourrait tout à fait tendre vers $+\infty$.

d) on sait que $\forall n \geq 3, u_n \geq 0$ et donc $\forall n \geq 4, u_{n-1} \geq 0$ donc $\frac{1}{2}u_{n-1} \geq 0$ donc $\frac{1}{2}u_{n-1} + (n-1) - 1 \geq (n-1) - 1$ donc $u_n \geq (n-1) - 1$ ainsi $\forall n \geq 4, u_n \geq n - 2$.

e) on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$ et que $\forall n \geq 4, u_n \geq n - 2$ donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2)a) $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n - 8 + 24 = 2u_n - 4n + 12$

$= \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \frac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier rang $v_0 = 4u_0 - 8 \times 0 + 24 = 4 + 24 = 28$ et donc :

$v_n = 28\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{28}{2^n}$, elle est donc décroissante de limite 0.

b) $v_n = 4u_n - 8n + 24$ donc $v_n + 8n - 24 = 4u_n$ et donc $u_n = \frac{v_n + 8n - 24}{4} = \frac{\frac{28}{2^n} + 8n - 24}{4} = \frac{7}{2^n} + 2n - 6$

c) si on pose $x_n = \frac{7}{2^n}$ et $y_n = 2n - 6$ alors ces deux suites sont respectivement géométriques et arithmétiques de raison ½ et 2 et de premiers termes 7 et -6 de plus on a $u_n = x_n + y_n$.

$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} x_k + \sum_{k=0}^{k=n} y_k = \frac{x_0\left(1 - q^{n+1}\right)}{1 - q} + \frac{(n+1)(y_0 + y_n)}{2} = \frac{7\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{(n+1)(-6 + 2n - 6)}{2}$

$= 14\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - (n+1)(n-6)$