Chapitre 4 – Etude de suites

I. Sens de variation des suites :

Définition 1 :
Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang n_0 si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$
Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang n_0 si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$
Une suite est **monotone** si elle est soit toujours croissante, soit toujours décroissante.

Plusieurs méthodes à connaître pour étudier le sens de variations d'une suite :

- la méthode la plus générale : **chercher le signe de $u_{n+1} - u_n$.**
  Exemple 1 : étudier le sens de variation de la suite : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 3n - 1$.

- Si tous les termes sont positifs, **comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1**.
  Exemple 2 : étudier le sens de variation de la suite : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

- si f est une fonction monotone sur l'intervalle $[n_0 ; +\infty[$ et que $u_n = f(n)$, alors la suite u est monotone pour $n \geq n_0$.
  Exemple 3 : $u_n = \sqrt{n}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ puisque la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
  Attention : la réciproque est fausse : contre-exemple : observer le sens de variation de la fonction $g(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{x}$ à l'aide de la calculatrice, puis celui de la suite $u_n = g(n)$.

- **Les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ s'étudient de façon particulière : on démontre le sens de variation par récurrence.** Attention : f monotone n'implique pas u monotone.
  Exemple 4 : Tracer les premiers termes de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ grâce à **la méthode de l'escalier** (à connaître) puis montrer par récurrence de deux manières différentes que u est croissante. Que se passe-t-il si on choisit $u_0 = 0$?

II. Convergence d'une suite :

Définition 2 : La suite u **converge** vers $l \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = l}$
Si la suite n'est pas convergente, elle est **divergente.**
La suite **diverge vers +∞** si tout intervalle du type]A ; +∞[contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : on écrit $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$
La suite **diverge vers –∞** si la suite des termes opposés $(-u_n)$ diverge vers +∞.

Exemple 5 : Etudier la convergence des suites $u_n = \frac{1}{n} + 3$; $v_n = n^2 + 1$ et $w_n = (-1)^n$.

Propriété 1 : Les opérations sur les limites de fonctions **en** $+\infty$ (somme, produit, quotient) sont aussi valables pour les suites. En particulier, les quatre **formes indéterminées** sont les mêmes.

Propriété 2 : (rappel) Une suite géométrique de terme général $u_n = u_0 q^n$ converge vers 0 ssi $q \in$ ………

Théorème 3 : *(admis)* ***Théorème de comparaison :*** Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.

- Si pour tout n, $u_n \leq v_n$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n$.
- Si pour tout n, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Théorème 4 : ***Théorème des gendarmes*** : (rappel de 1ère)
u , v et w sont des suites qui vérifient les conditions suivantes :
- v et w convergent vers le même réel l
- à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$

Alors la suite u converge aussi et sa limite est l.

Démonstration : *vue en 1ère.*

Théorème 5 : *limite de la composée d'une suite et d'une fonction continue :*
Soit f une fonction continue et u une suite. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Remarque : en remplaçant a et L par $+\infty$ ou $-\infty$, les énoncés restent vrais.
Démonstration : *cas particulier du théorème de composée de limites vu au chap 1.*

Exemple 6 : Donner la limite de la suite $u_n = \left(\frac{\sin n}{n}\right)^3$ Donner la limite de la suite $u_n = \frac{1}{2^n+1}$.

III. Suite majorée, minorée, bornée :

1. Encadrements : Rappel : les encadrements ne se soustraient pas.

Exemple 7: Si $0 < x < 1$ et $1 < y < 2$, donner un encadrement de $y - x$.

2. Majorants, minorants :

Définition 3 : Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
M est appelé un **majorant** de la suite.
Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq m$.
m est appelé un **minorant** de la suite.
Une suite à la fois majorée et minorée est dite **bornée.**

Exemple 8 : Montrer que la suite $u_n = \sqrt{2 + \cos n}$ est bornée. Donner plusieurs majorants et minorants de cette suite.

3. Convergence des suites monotones :

Théorème 6 : (admis) Toute suite croissante majorée converge.
Toute suite décroissante minorée converge.

Remarque : ces théorèmes sont utiles pour affirmer l'existence de la limite, mais ils ne donnent pas sa valeur, car le majorant trouvé n'est pas nécessairement la limite (voir exemple suivant).

Exemple 9 : La suite définie ainsi : $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0{,}111 \ldots 1$ avec n décimales, converge-t-elle ? Comment déterminer sa limite ?

Théorème 7 : Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$
Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$

Démonstration :

IV. Suites adjacentes :

Définition 4 : Deux suites (u_n)et (v_n) sont **adjacentes** si :
- ♦ l'une est croissante et l'autre est décroissante
- ♦ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

Schéma :

Théorème 8 : ***Théorème des suites adjacentes** :*
Si deux suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent, et ont la même limite.

Démonstration :