I. Raisonnement par récurrence :

Axiome posé en 1889 par Peano, puis Poincaré a prouvé en 1894 qu'il était non démontrable.

Définition: Soit $n_0 \in$ IN. Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

- initialisation : on montre que la propriété est vraie quand $n = n_0$.
- hérédité : on **suppose** que la propriété est vraie au rang k (c'est l'**hypothèse de récurrence**) On montre qu'alors elle est vraie au rang k +1.
- conclusion : donc la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Analogie : un raisonnement par récurrence peut être vu comme une infinité de dominos alignés et contigus : on fait tomber le domino n° n_0 de la file ; la chute de tout domino entraîne la chute du suivant ; donc tous les dominos à partir de n_0 tombent.

Remarque : la rédaction d'un raisonnement par récurrence en trois étapes est à savoir.

II. exercices :

1) Montrer par récurrence que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$ est constante.

2) On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ où n est un entier naturel, $n \geq 1$

   1) a) Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 .

      b) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et de n.

   2)Démontrez par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$ on a : $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Démontrer que $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$

4) Montrez que pour tout réel positif a et $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$

5) Démontrez que pour $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

6) Démontrer que la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ a tous ses termes dans $[0; 2]$

7) Démontrer que $\forall n \geq 6,\ 2^n > 6n + 7$

8) a) Démontrer que $\forall n > 3,\ 2^n > 3n + 1$

   b) en déduire la limite de $2^n - 2n$ quand n tend vers $+\infty$

9) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^{n+2} \geq 3^{n+2} + 4^{n+2}$

10) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1,\ n(2n + 1)(7n + 1)$ est divisible par 6.

11) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

12) Montrer que pour tout $n \geq 1,\ 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

13) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

14) Soit la suite u définie par u_0 et $u_{n+1} = u_n + 6n + 30$

   a) montrer que si $u_k$est pair alors u_{k+1} l'est aussi

   b) montrer que si $u_k$est un multiple de 3 alors u_{k+1} l'est aussi

   c) trouver une condition suffisante pour que les termes de u soient divisibles par 6.

15) démontrer que $\forall n \geq 6, \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

16) pour quels n a-t-on $2^n > 2n$

17) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

18) Soit u définie par $u_1 = 5$ et $\forall n \geq 2 : u_n = 2u_{n-1} - n$,

   démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$

19) soit P_n: « 9 divise $10^n + 1$ »,

   montrer l'hérédité, que peut-on dire de P_0, P_1, P_2 et P_3 , faire une conjecture.

   Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^n - 1$ en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est fausse.

I. Raisonnement par récurrence :

Axiome posé en 1889 par Peano, puis Poincaré a prouvé en 1894 qu'il était non démontrable.

Définition: Soit $n_0 \in$ IN. Pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

- initialisation : on montre que la propriété est vraie quand $n = n_0$.
- hérédité : on **suppose** que la propriété est vraie au rang k (c'est l'**hypothèse de récurrence**) On montre qu'alors elle est vraie au rang k +1.
- conclusion : donc la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Analogie : un raisonnement par récurrence peut être vu comme une infinité de dominos alignés et contigus : on fait tomber le domino n° n_0 de la file ; la chute de tout domino entraîne la chute du suivant ; donc tous les dominos à partir de n_0 tombent.

Remarque : la rédaction d'un raisonnement par récurrence en trois étapes est à savoir.

II. exercices :

1) Montrer par récurrence que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$ est constante.

2) On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ où n est un entier naturel, $n \geq 1$

   1) a) Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 .

      b) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et de n.

   2) Démontrez par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$ on a : $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Démontrer que $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$

4) Montrez que pour tout réel positif a et $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$

5) Démontrez que pour $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

6) Démontrer que la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ a tous ses termes dans $[0; 2]$

7) Démontrer que $\forall n \geq 6,\ 2^n > 6n + 7$

8) a) Démontrer que $\forall n > 3,\ 2^n > 3n + 1$

   b) en déduire la limite de $2^n - 2n$ quand n tend vers $+\infty$

9) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^{n+2} \geq 3^{n+2} + 4^{n+2}$

10) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1,\ n(2n + 1)(7n + 1)$ est divisible par 6.

11) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

12) Montrer que pour tout $n \geq 1,\ 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

13) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

14) Soit la suite u définie par u_0 et $u_{n+1} = u_n + 6n + 30$

   a) montrer que si u_k est pair alors u_{k+1} l'est aussi

   b) montrer que si u_k est un multiple de 3 alors u_{k+1} l'est aussi

   c) trouver une condition suffisante pour que les termes de u soient divisibles par 6.

15) démontrer que $\forall n \geq 6, \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

16) pour quels n a-t-on $2^n > 2n$

17) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

18) Soit u définie par $u_1 = 5$ et $\forall n \geq 2 : u_n = 2u_{n-1} - n$,

   démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$

19) soit P_n: « 9 divise $10^n + 1$ »,

   montrer l'hérédité, que peut-on dire de P_0, P_1, P_2 et P_3 , faire une conjecture.

   Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^n - 1$ en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est fausse.