Correction des exercices de récurrence

1) Montrer par récurrence que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$ est constante.

Soit $P(n)$ la proposition : « $u_n = 2$ »

Initialisation : avec $= 0$, $u_n = 2$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit k tel que $P(k)$ soit vraie , montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie

$u_{k+1} = \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}2 + \frac{1}{2}$ (HR)

$= 2$ donc$P(k+1)$ est aussi vraie.

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 0,\ u_n = 2$

2) On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ où n est un entier naturel, $n \geq 1$

1) a) CalculerS_1, S_2, S_3, S_4 .

b) ExprimerS_{n+1} en fonction de S_n.

2)Démontrez par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$ on a : $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$S_1 = 1, S_2 = 5, S_3 = 14, S_4 = 30$$

$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2$$

Soit $P(n)$ la proposition : « $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »

Initialisation : avec $= 1$, $u_n = u_1 = 1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit k tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie

$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$ (HR)

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6\,]}{6}$$

Nous on voudrait avoir $\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+3k+4k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$

Exactement ce que l'on avait. Ainsi $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$donc $P(k+1)$ est aussi vraie.

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 1,\ S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Démontrer que $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$

Soit $P(n)$ la proposition : « $2^n \leq n!$ »

Initialisation : avec $= 4$, $2^n = 2^4 = 16$ et $n! = 4! = 24$ donc $2^n \leq n!$ donc $P(4)$ est vraie

Hérédité : soit $k \geq 4$ tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie

$(k+1)! = k!\,(k+1) \geq 2^k(k+1)$ (HR)

Vu que $k \geq 4$ on aura $k+1 \geq 2$ et donc $2^k(k+1) \geq 2^k 2$ et donc $(k+1)! \geq 2^k(k+1) \geq 2^{k+1}$

donc$P(k+1)$ est aussi vraie.

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 4,\ 2^n \leq n!$

4) Montrez que pour tout réel positif a et $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$

Soit a un réel positif

Soit $P(n)$ la proposition : « $(1+a)^n \geq 1+na$ »

Initialisation : avec $= 0$, $(1+a)^n = (1+a)^0 = 1$ et $1+na = 1$ donc $(1+a)^n \geq 1+na$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie

$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)$ (HR)

$\geq 1+ka+a+ka^2 \geq 1+(k+1)a+ka^2orka^2 \geq 0$

Donc $1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$ et donc$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$

donc$P(k+1)$ est aussi vraie, l'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$

Ceci étant vrai pour un a positif quelconque, ça le sera pour n'importe quel a positif.

5) Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

Soit $P(n)$ la proposition : « $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 »

Initialisation : avec $= 0$,$3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^2 - 2^1 = 7$ qui est divisible par 7 et donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

soit$k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$P(k)$soit vraie autrement dit on a un entier m tel que $3^{2k+2} - 2^{k+1} = 7m \Leftrightarrow 3^{2k+2} = 7m + 2^{k+1}$

$3^{2(k+1)+2} - 2^{(k+1)+1} = 3^{2k+4} - 2^{k+2} = 3^{2k+2}3^2 - 2^{k+2} = (7m+2^{k+1})3^2 - 2^{k+2}$

$= (7m+2^{k+1})9 - 2^{k+2} = 7m9 + 2^{k+1}9 - 2^{k+2} = 7m9 + 2^{k+1}9 - 2^{k+1}2 = 7m9 + 2^{k+1}(9-2)$

$= 7m9 + 2^{k+1}(9-2) = 7(9m+2^{k+1})$donc$3^{2(k+1)+2} - 2^{(k+1)+1}$ est divisible par 7

Donc $P(k+1)$ est vraie, l'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7

6) Démontrer que la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ a tous ses termes dans $[0; 2]$

Soit $P(n)$ la proposition : $u_n \in [0; 2]$

Initialisation : avec $= 0$, $u_n = u_0 = 0$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit k tel que $P(k)$ soit vraie , montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie

$P(k)$vraie$\Leftrightarrow 0 \leq u_k \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq u_k + 2 \leq 4$ or $\sqrt{x}$ est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$

donc$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_k + 2} \leq \sqrt{4}$ donc $\sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq 2$ donc $0 \leq u_{k+1} \leq 2$ donc $P(k+1)$ est aussi vraie.

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 0,\ u_n \in [0; 2]$

7) Démontrer que $\forall n \geq 6,\ 2^n > 6n + 7$

Soit $P(n)$ la proposition : $2^n > 6n + 7$

Initialisation : avec $= 6$,$2^n = 2^6 = 64$ et $6n + 7 = 6 \times 6 + 7 = 43$ donc $2^n > 6n + 7$,

donc$P(6)$est vraie.

Hérédité : soit $k \geq 6$ tel que $P(k)$ soit vraie , montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$2^{k+1} = 2^k 2$or$2^k > 6k + 7$ donc $2^{k+1} > (6k+7)2$ donc $2^{k+1} > 12k + 14$

Nous on veut $6(k+1) + 7 = 6k + 13$ dans le membre de droite.

$12k + 14 = (6k+13) + (6k+1)ork \geq 6$ donc $6k + 1 \geq 0$

Donc $(6k+13) + (6k+1) \geq 6k + 13$

Et donc $2^{k+1} > 12k + 14 \geq 6k + 13$ donc $2^{k+1} > 6k + 13$ autrement dit $2^{k+1} > 6(k+1) + 7$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 6,\ 2^n > 6n + 7$

8) a) Démontrer que $\forall n > 3,\ 2^n > 3n + 1$

Voir exercice 7)

b) en déduire la limite de $2^n - 2n$ quand n tend vers $+\infty$

$2^n - 2n > 3n + 1 - 2n$d'après a)

$\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$donc en utilisant le théorème de comparaison appliqué aux suites on aura nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 2n = +\infty$

9) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^{n+2} \geq 3^{n+2} + 4^{n+2}$

Soit $P(n)$ la proposition : $5^{n+2} \geq 3^{n+2} + 4^{n+2}$

Initialisation : avec $= 0$,$5^{n+2} = 5^2 = 25$ et $3^{n+2} + 4^{n+2} = 3^2 + 4^2 = 25$

donc $5^{n+2} \geq 3^{n+2} + 4^{n+2}$, donc $P(0)$est vraie.

Hérédité : soit $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie , montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$5^{(k+1)+2} = 5^{k+2}5$or$5^{k+2} \geq 3^{k+2} + 4^{k+2}$ donc $5^{(k+1)+2} > (3^{k+2} + 4^{k+2})5$ or $3^{k+2}5 > 3^{k+3}$ et $4^{k+2}5 > 4^{k+3}$ donc $5^{(k+1)+2} > 3^{k+3} + 4^{k+3}$ autrement dit $5^{(k+1)+2} > 3^{(k+1)+2} + 4^{(k+1)+2}$

Donc $P(k+1)$ est vraie. L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^{n+2} \geq 3^{n+2} + 4^{n+2}$

10) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$, $n(2n + 1)(7n + 1)$ est divisible par 6.

Soit $P(n)$ la proposition : « $n(2n + 1)(7n + 1)$ est divisible par 6 »

Initialisation : avec $= 1$,$n(2n + 1)(7n + 1) = (2 + 1)(7 + 1) = 24$ qui est un multiple de 6 et donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $k \geq 1$ tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$P(k)$soit vraie autrement dit on a un entier m tel que $k(2k + 1)(7k + 1) = 6m$

$\Leftrightarrow k(14k^2 + 9k + 1) = 6m \Leftrightarrow 14k^3 + 9k^2 + k = 6m \Leftrightarrow 14k^3 = 6m - 9k^2 - k$

$$(\boldsymbol{k+1})(\boldsymbol{2(k+1)} + \boldsymbol{1})(\boldsymbol{7(k+1)} + \boldsymbol{1}) = (k+1)(2k+3)(7k+8) = (k+1)(14k^2 + 37k + 24)$$
$$= 14k^3 + 37k^2 + 24k + 14k^2 + 37k + 24 = 13k^3 + 51k^2 + 61k + 24$$
$$= (6m - 9k^2 + k) + 51k^2 + 61k + 24 \qquad \text{(HR)}$$
$$= 6m + 42k^2 + 60k + 24 = 6(m + 7k^2 + 10k + 4)$$

Mon expression en gras est donc divisible par 6, donc $P(k+1)$ est vraie.

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 1,\ n(2n + 1)(7n + 1)$ est divisible par 6

11) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

Soit $P(n)$ la proposition : « $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ »

Initialisation : avec $= 1$,$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

De plus $1 - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{2}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$et donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(n+1)$ est aussi vraie.

$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n+1}{((n+1)+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{((n+1)+1)!}$ (HR)

$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{\mathrm{n}+2}{(n+1)!(\mathrm{n}+2)} + \frac{n+1}{(n+2)!}$

$= 1 + \frac{-(n+2)+n+1}{(n+2)!} = 1 + \frac{-1}{(n+2)!}$

CQFD donc $P(k+1)$ est vraie.

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

12) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Soit $P(n)$ la proposition : « $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 »

Initialisation : avec $= 1$,$3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 3 \times 5 + 2 = 17$ qui est divisible par 17 et donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

soit$k \geq 1$ tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$P(k)$soit vraie autrement dit on a un entier m tel que $3 \times 5^{2k-1} + 2^{3k-2} = 17m$

$\Leftrightarrow 2^{3k-2} = 17m - 3 \times 5^{2k-1}$

$3 \times 5^{2(k+1)-1} + 2^{3(k+1)-2} = 3 \times 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 3 \times 5^{2k+1} + 2^{3k-2}2^3$

$= 3 \times 5^{2k+1} + \left(17m - 3 \times 5^{2k-1}\right)2^3$ (HR)

$= 3 \times 5^{2k+1} + 17m8 - 24 \times 5^{2k-1} = 3 \times 5^{2k-1}5^2 - 24 \times 5^{2k-1} + 17m4$

$= (75 - 24) \times 5^{2k-1} + 17m4 = 51 \times 5^{2k-1} + 17m4 = 17 \times 3 \times 5^{2k-1} + 17m4$

$= 17\left(3 \times 5^{2k-1} + m4\right)$ donc$3 \times 5^{2(k+1)-1} + 2^{3(k+1)-2}$ est divisible par 17.

donc$P(k+1)$ est vraie, l'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 1, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17

13) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Soit $P(n)$ la proposition : « $4^n - 1$ est divisible par 3 »

Initialisation : avec $= 0$,$4^n - 1 = 4^0 - 1 = 0$, or 0 est divisible par 3 donc $P(0)$est vraie.

Hérédité : soit $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire qu'il existe un entier m tel que $4^n - 1 = 3m$, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$4^{k+1} - 1 = 4^k 4 - 1 = (3m+1)4 - 1$ (HR)

$= 3 \times 4m + 4 - 1 = 3 \times 4m + 3 = 3(m+1)$donc$4^{k+1} - 1$ est bien un multiple de 3

Donc $P(k+1)$ est vraie. L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, « $4^n - 1$ est divisible par 3 »

14) Soit la suite u définie par u_0 et $u_{n+1} = u_n + 6n + 30$

a) montrer que si $u_k$est pair alors u_{k+1} l'est aussi

si$u_k$est pair alors il existe un entier m tel que$u_k = 2m$

$u_{k+1} = u_k + 6k + 30 = 2m + 2 \times 3k + 2 \times 15 = 2(m + 3k + 15)$

m et k étant des entiers on aura u_{k+1} multiple de 2.

b) montrer que si $u_k$est un multiple de 3 alors u_{k+1} l'est aussi

même topo que pour la question a)

c) trouver une condition suffisante pour que les termes de u soient divisibles par 6.

D'après a et b Si $u_k$est multiple de 2 et de 3 , (autrement dit multiple de 6) alors u_{k+1} l'est aussi.

En prenant u_0 multiple de 6 on aurait l'initialisation pour nos deux récurrences et donc tous les termes seraient multiples de 6

15) démontrer que $\forall n \geq 6, \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

Soit $P(n)$ la proposition : « $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ »

Initialisation :

avec $=6$,$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{15}{16}\right)\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{35}{36}\right)=\frac{302400}{518400}=\frac{7}{12}$

$\frac{n+1}{2n}=\frac{6+1}{2\times 6}=\frac{7}{12}$, donc $P(6)$est vraie.

Hérédité : soit $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$ (HR)

$=\frac{k+1}{2k}\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\left(\frac{k^2+2k+1-1}{(k+1)^2}\right)=\frac{1}{2k}\left(\frac{k^2+2k}{k+1}\right)=\frac{k(k+2)}{2k(k+1)}=\frac{(k+2)}{2(k+1)}=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$donc$P(k+1)$ est vraie.

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 6, \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

16) pour quels n a-t-on $2^n > 2n$.

Soit $P(n)$ la proposition : « $2^n > 2n$ »

$n=0$, pas le suivant, ni celui d'après pour $n=4$ et visiblement pour ceux qui suivent

Regardons l'hérédité

Hérédité : soit $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$2^{k+1}=2^k 2$or$2^k > 2k$ donc $2^{k+1} > 2k2$ on voudrait avoir $2(k+1)$ dans le membre de droite.

Est-ce que l'on a toujours $2k2 \geq 2(k+1)$ pour le savoir on va résoudre l'inéquation.

$2k2 \geq 2(k+1) \Leftrightarrow k2 \geq (k+1) \Leftrightarrow k \geq 1$

Sous cette condition on aura $2^{k+1} > 2(k+1)$ donc $P(k+1)$sera vérifiée et donc l'hérédité sera vraie.

Donc l'hérédité ne pourra être valide que si $k \geq 1$ autrement dit

Le fait que la propriété était vrai au rang 0 ne pouvait être transmit au rang d'après.

Conclusion

Par contre vu que c'est vrai au rang 4 et que $4 \geq 1$ ça sera transmit après, et donc $\forall n \geq 4, P(n)$ vraie.

$=3\times 4m+4-1=3\times 4m+3=3(m+1)$ donc$4^{k+1}-1$ est bien un multiple de 3

Donc $P(k+1)$ est vraie. L'hérédité est donc vraie.

17) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{i=n} i^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Soit $P(n)$ la proposition : « $\sum_{i=0}^{i=n} i^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ »

Initialisation :

avec $=0$,$\sum_{i=0}^{i=n} i^3=0^3=0$ et $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{0(0+1)}{2}\right]^2=0$

Hérédité : soit $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$\sum_{i=0}^{i=k+1} i^3=\sum_{i=0}^{i=k} i^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$ (HR)

$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4}=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^2(k+1)}{4}=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4(k+1)\right)}{4}$

$=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4(k+1)\right)}{4}=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

18) Soit u définie par $u_1 = 5$et $\forall n \geq 2 : u_n = 2u_{n-1} - n$,
démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$

Soit $P(n)$ la proposition : «$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$ »

Initialisation :

avec $= 1$, $2(2^{n-1} + 1) + n\ = 2^{\mathrm{n}} + 2 + n = 2^1 + 2 + 1 = 5$ or $u_1 = 5$ donc $P(1)$ vraie.

Hérédité : soit $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie, montrons que dans ce cas $P(k+1)$ est aussi vraie.

$$u_{k+1} = 2u_k - (k+1) = 2(2(2^{k-1} + 1) + k) - (k+1) = 2(2^k + 2 + k) - k - 1$$

$= 2^{k+1} + 4 + 2k - k - 1 = 2^{k+1} + 3 + k = 2\left(2^{(k+1)-1} + 1\right) + (k+1)$

donc$P(k+1)$ est aussi vraie.

L'hérédité est donc vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$

19) soit P_n: « 9 divise $10^n + 1$ »,
montrer l'hérédité, que peut-on dire de P_0, P_1, P_2et P_3 , faire une conjecture.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^n + 1$ en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} P_n$ est fausse.

L'hérédité est facile je vous laisse vous en occuper comme des grands.

Aucune des propositions P_0, P_1, P_2 et P_3 n'est vraie, on peut se douter que jamais 9 ne divisera $10^n + 1$

On pourrait démontrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^n - 1$

Autrement dit que pour tout n entier il existe un m entier tel que $10^n - 1 = 9m$

Et donc $10^n + 1 = 10^n - 1 + 2 = 9m + 2$ quantité dont la division par 9 ne tombe pas juste donc $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n + 1$ n'est pas divisible par 9.