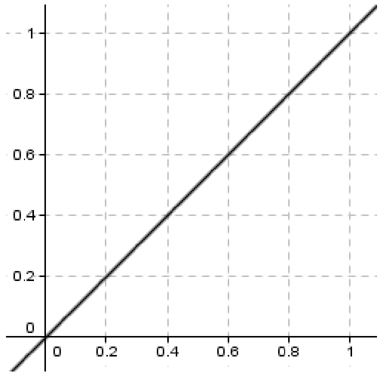
Devoir maison



Partie A

Soit f_1 la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f_1(x) = x$

On note a_1 l'aire du domaine D_1 situé sous la courbe représentative de f_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

1) Colorier le domaine D_1
2) Calculer son aire a_1

Partie B

Soit f_3 la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f_3(x) = x^3$

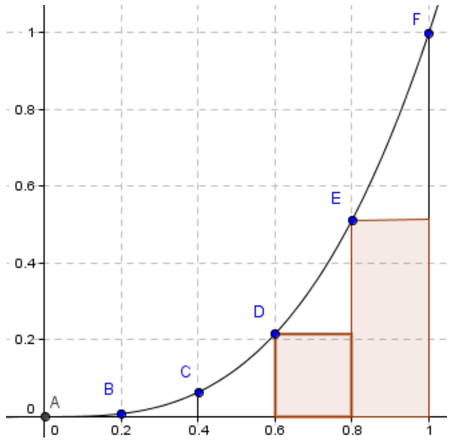
On note a_3 l'aire du domaine D_3 situé sous la courbe représentative de f_3, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

N'ayant pas encore les outils nécessaires pour calculer a_2 nous allons déterminer une valeur approchée de cette aire. Nous verrons cette année l'intégration qui nous permettra de régler ce problème en vingt secondes.

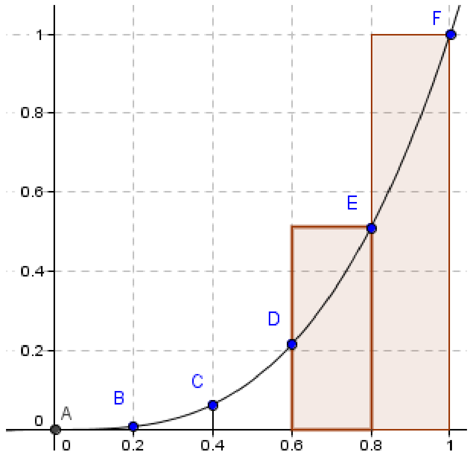
1. Avec cinq intervalles

On subdivise l'intervalle $[0; 1]$ en cinq intervalles de même longueur et on construit deux figures une avec les rectangles contenus dans D_3 et une avec les rectangles contenantD_3. Compléter les figures suivantes :

1



2



a) Calculez la somme des aires des rectangles contenus dans D_3 (figure 1)
b) Calculez la somme des aires des rectangles contenant D_3 (figure 2)
c) En déduire un encadrement de a_3 l'aire de D_3

2. Avec n subdivisions

On subdivise l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) de même longueur $\frac{1}{n}$.

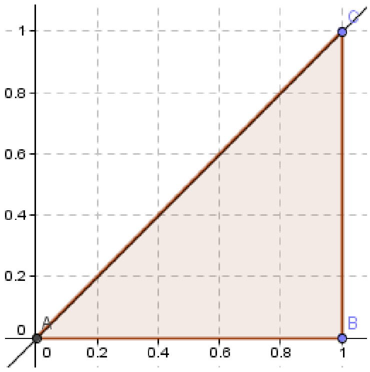
On construit comme ci-dessus n rectangles qui contiennent D_3.

a) Démontrer que la somme des aires des rectangles contenus dans D_3 et celle des aires des rectangles contenant D_3 sont données respectivement par :

$$A_n = \frac{1^3+2^3+3^3+\dots+(n-1)^3}{n^4} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}{n^4}$$

b) En posant $u_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$, calculer u_1, u_2, u_3, u_4 que remarque-t-on ?
c) Après avoir télécharger le programme Xcas (aller sur le site pédagogique, dans la rubrique divers de la partie terminale S), taper Cn :=somme(k^3,k,1,n) qui revient à définir la suite (C_n) par $C_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$, puis taper factoriser(Cn) , quels sont les résultats affichés ? vérifier que les formules sont bien compatibles avec les résultats de la question précédente.
d) En déduire que $B_n = \frac{(n+1)^2}{4n^2}$ et $A_n = \frac{(n-1)^2}{4n^2}$
e) Donner le signe et le sens de variation de la suite $(B_n - A_n)$
f) Proposer un algorithme ou/et un programme permettant de déterminer le rang à partir duquel l'écart $B_n - A_n$ est inférieur à une valeur donnée
g) Déterminer le rang à partir duquel $B_n - A_n \leq 10^{-8}$
h) En déduire un encadrement de a_3 d'amplitude inférieure à 10^{-8}

Devoir maison : correction



Partie A

Soit f_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_1(x) = x$

On note a_1 l'aire du domaine D_1 situé sous la courbe représentative de f_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

1) Nous avons à faire à un triangle rectangle dont les côté de l'angle droit mesurent 1 et donc son aire sera de $A = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$ unité d'aire.

Partie B

Soit f_3 la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_3(x) = x^3$

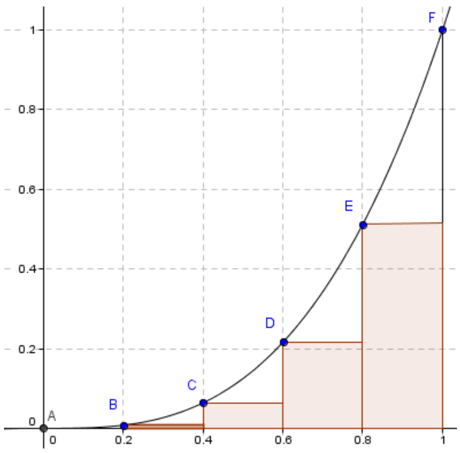
On note a_3 l'aire du domaine D_3 situé sous la courbe représentative de f_3, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

N'ayant pas encore les outils nécessaires pour calculer a_2 nous allons déterminer une valeur approchée de cette aire. Nous verrons cette année l'intégration qui nous permettra de régler ce problème en vingt secondes.

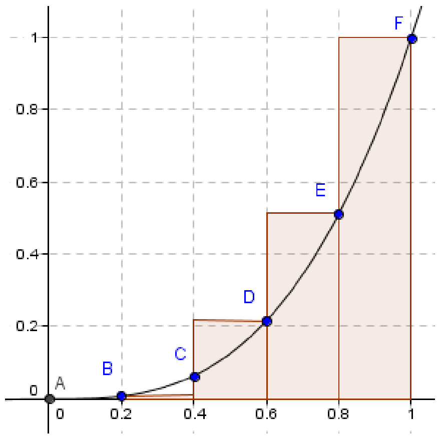
1. Avec cinq intervalles

On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en cinq intervalles de même longueur et on construit deux figures une avec les rectangles contenus dans D_3 et une avec les rectangles contenantD_3. Compléter les figures suivantes :

1



2



a) Calculez la somme des aires des rectangles contenus dans D_3 (figure 1)

$$A = \frac{1}{5}\times 0^3 + \frac{1}{5}\times 0{,}2^3 + \frac{1}{5}\times 0{,}4^3 + \frac{1}{5}\times 0{,}6^3 + \frac{1}{5}\times 0{,}8^3 = \frac{1}{5}(0 + 0{,}008 + 0{,}064 + 0{,}216 + 0{,}512) = 0{,}16$$

b) Calculez la somme des aires des rectangles contenant D_3 (figure 2)

$$A = \frac{1}{5}\times 0{,}2^3 + \frac{1}{5}\times 0{,}4^3 + \frac{1}{5}\times 0{,}6^3 + \frac{1}{5}\times 0{,}8^3 + \frac{1}{5}\times 1^3 = \frac{1}{5}(0{,}008 + 0{,}064 + 0{,}216 + 0{,}512 + 1) = 0{,}36$$

c) $0{,}16 < a_3 < 0{,}36$

2. Avec n subdivisions

On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) de même longueur $\frac{1}{n}$.

On construit comme ci-dessus n rectangles qui contiennentD_3.

a) la somme des aires des rectangles contenus dans D_3 et celle des aires des rectangles contenant D_3 sont données respectivement par :

$$A_n = \frac{1}{n}\left(0^3 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^3}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1^3+2^3+\cdots(n-1)^3}{n^3}\right) = \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3}{n^4}$$

$$B_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots \left(\frac{n}{n}\right)^3\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \cdots + \frac{n^3}{n^3}\right) = \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}$$

b) En posant $u_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$, calculer u_1, u_2, u_3, u_4 que remarque-t-on ?

$u_1 = 1^3 = 1$ $\qquad u_2 = 1^3 + 2^3 = 9$ $\qquad u_3 = 1^3 + 2^3 = 3^3 = 36$ $\qquad u_n = 100 = 10^2$

On a , à faire à des carrés de nombres (de 1, 3, 6,10), le passage d'un au suivant, se fait en ajoutant une quantité qui augmente d'une unité à chaque bond.

c) Après avoir télécharger le programme Xcas (aller sur le site pédagogique, dans la rubrique divers de la partie terminale S), taper Cn :=somme(k^3,k,1,n) qui revient à définir la suite (C_n) par $C_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3$, puis taper factoriser(Cn) , quels sont les résultats affichés ? vérifier que les formules sont bien compatibles avec les résultats de la question précédente.

On obtient : $\frac{((n+1)^4-2*(n+1)^3+(n+1)^2)}{4}$ puis en factorisant : $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $B_n = \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4} = \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2}$

$A_n = B_n - \frac{n^3}{n^4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2} - \frac{1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2} - \frac{4n}{4n^2} = \frac{n^2-2n+1}{4n^2} = \frac{(n-1)^2}{4n^2}$

e) Donner le signe et le sens de variation de la suite $(B_n - A_n) = \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$, la suite est donc positive.

Méthode 1

$(B_{n+1} - A_{n+1}) - (B_n - A_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{(n+1)n}$ cette quantité est négative quelle que soit la valeur de n, donc la suite $(B_n - A_n)$ est décroissante.

Méthode 2

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$ intervalle qui contient $\mathbb{N}^*$ et sur $\mathbb{N}^*$on a $(B_n - A_n) = \frac{1}{n} = f(n)$ donc cette suite est décroissante sur $\mathbb{N}^*$

f) Proposer un algorithme ou/et un programme permettant de déterminer le rang à partir duquel l'écart $B_n - A_n$ est inférieur à une valeur donnée

Algorithme 1

Demander la valeur de E l'écart minimum entre $B_n - A_n$
Stocker 1 dans n
Tant que $B_n - A_n > E$
Augmenter n d'une unité
Fin du tant que
Afficher n

Autre possibilité qui s'appuye sur le fait que $B_n - A_n = \frac{1}{n}$

Si on veut $\frac{1}{n}$<E on veut $n > \frac{1}{E}$

Algorithme 2

Demander la valeur de E,
Afficher la troncature de $\frac{1}{E}$ augmentée de 1

g) $B_n - A_n \leq 10^{-8} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 10^{-8} \Leftrightarrow \frac{1}{10^{-8}} \leq n \Leftrightarrow 10^8 \leq n$

h) En déduire un encadrement de a_3 d'amplitude inférieure à 10^{-8}

On doit avoir : $A_{10^8} \leq a_3 \leq B_{10^8} \Leftrightarrow \frac{(10^8-1)^2}{4(10^8)^2} \leq a_3 \leq \frac{(10^8+1)^2}{4(10^8)^2}$

Un encadrement sera $0{,}249999999 \leq a_3 \leq 0{,}250000001$