Devoir maison n°1
(révisions suites)

Pour le 12/09/2017

Exercice 1

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul de la manière suivante : $v_1 = 16$ $v_2 = 1156$ $v_3 = 111556$ autrement dit en injectant 15 après le dernier 1 d'un terme on obtient le suivant.

1) Complétez la phrase suivante : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 ,v_n s'écrit avec …. chiffres égaux à 1, suivis de …… chiffres égaux à …. et d………… chiffre ……….
2) En écrivant v_n avec des puissances de 10 faire apparaitre les termes de deux suites géométriques. **En les ajoutant prouver que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 ,$v_n = \frac{10^{2n}+4\times10^n+4}{9}$.**
3) Ecrire la phrase en gras dans la question précédente sous forme symbolique (i.e. en n'utilisant aucun mot en français, uniquement des symboles comme : $\in, \cap, \exists$,…)
4) En factorisant l'expression obtenue à la question 2) déterminer sans calculatrice les valeurs des termes 2, 4 et 5 de la suite (a_n) définie pour tout entier naturel non nul par $a_n = \sqrt{v_n}$
5) Conjecturez une phrase comme celle écrite à la question 1 pour décrire le secret de fabrication des termes de (a_n).
6) En admettant la conjecture de la question précédente et en vous inspirant de la méthode utilisée à la question 2) déterminer une formule rigoureuse de a_n. Vous écrirez votre conclusion de manière symbolique.

Exercice 2

La population de coccinelles augmente de 4% tous les ans et 50 coccinelles meurent. Elle compte 3000 insectes en 2012.

On appelle (u_n) la population de coccinelles en l'année $2012 + n$ (n est un entier naturel).

<u>Partie 1</u>

1) calculer u_0, u_1 et u_2
2) exprimer la population de coccinelles u_{n+1} en l'année $2012 + n + 1$ en fonction de u_n.
3) écrire un algorithme qui permet de déterminer la population en l'année $2012 + n$ où n est un entier naturel.
4) Ecrire un programme sur la calculatrice, qui permet de déterminer la population en l'année $2012 + n$ où n est un entier naturel. (recopier le programme)
5) A l'aide du programme ci-dessus, déterminer la population des coccinelles au bout de 6 ans et en 2023.
6) écrire un algorithme qui permet de déterminer en qu'elle année la population a doublé. puis donner le résultat.

<u>Partie 2</u>

On pose (v_n) la suite qui a tout entier naturel n associe le nombre $v_n = u_n - 1250$.

1) Calculer v_0, v_1, v_2 puis conjecturez la nature de la suite.
2) Preuve de la conjecture
   a. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis de u_n.
   b. Factoriser l'expression ainsi obtenue, et en remplaçant intelligemment le contenu de la parenthèse prouvez votre conjecture.
3) Après en avoir déduit une expression de v_n en fonction de n, déduire une expression de u_n en fonction de n
4) Calculez la quantité de coccinelles en 2030.
5) Combien y aura-t-il de coccinelles en moyenne entre 2022 et2027 (vous n'êtes pas obligé d'y aller comme des bourrins)

Devoir maison n°1
(révisions suites)

Pour le 12/09/2017

Exercice 1

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul de la manière suivante : $v_1 = 16$ $v_2 = 1156$ $v_3 = 111556$ autrement dit en injectant 15 après le dernier 1 d'un terme on obtient le suivant.

1) Complétez la phrase suivante : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 ,v_n s'écrit avec …. chiffres égaux à 1, suivis de …… chiffres égaux à …. et d…………. chiffre ……….
2) En écrivant v_n avec des puissances de 10 faire apparaitre les termes de deux suites géométriques. **En les ajoutant prouver que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 ,$v_n = \frac{10^{2n}+4\times10^n+4}{9}$**.
3) Ecrire la phrase en gras dans la question précédente sous forme symbolique (i.e. en n'utilisant aucun mot en français, uniquement des symboles comme : $\in,\cap,\exists,\ldots$)
4) En factorisant l'expression obtenue à la question 2) déterminer sans calculatrice les valeurs des termes 2, 4 et 5 de la suite (a_n) définie pour tout entier naturel non nul par $a_n = \sqrt{v_n}$
5) Conjecturez une phrase comme celle écrite à la question 1 pour décrire le secret de fabrication des termes de (a_n).
6) En admettant la conjecture de la question précédente et en vous inspirant de la méthode utilisée à la question 2) déterminer une formule rigoureuse de a_n. Vous écrirez votre conclusion de manière symbolique.

Exercice 2

La population de coccinelles augmente de 4% tous les ans et 50 coccinelles meurent. Elle compte 3000 insectes en 2012.

On appelle (u_n) la population de coccinelles en l'année $2012 + n$ (n est un entier naturel).

<u>Partie 1</u>

1) calculer u_0, u_1 et u_2
2) exprimer la population de coccinelles u_{n+1} en l'année $2012 + n + 1$ en fonction de u_n.
3) écrire un algorithme qui permet de déterminer la population en l'année $2012 + n$ où n est un entier naturel.
4) Ecrire un programme sur la calculatrice, qui permet de déterminer la population en l'année $2012 + n$ où n est un entier naturel. (recopier le programme)
5) A l'aide du programme ci-dessus, déterminer la population des coccinelles au bout de 6 ans et en 2023.
6) écrire un algorithme qui permet de déterminer en qu'elle année la population a doublé. puis donner le résultat.

<u>Partie 2</u>

On pose (v_n) la suite qui a tout entier naturel n associe le nombre $v_n = u_n - 1250$.

1) Calculer v_0, v_1, v_2 puis conjecturez la nature de la suite.
2) Preuve de la conjecture
   a. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis de u_n.
   b. Factoriser l'expression ainsi obtenue, et en remplaçant intelligemment le contenu de la parenthèse prouvez votre conjecture.
3) Après en avoir déduit une expression de v_n en fonction de n, déduire une expression de u_n en fonction de n
4) Calculez la quantité de coccinelles en 2030.
5) Combien y aura-t-il de coccinelles en moyenne entre 2022 et2027 (vous n'êtes pas obligé d'y aller comme des bourrins)

Correction devoir maison n°1

Exercice 1

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul de la manière suivante : $v_1 = 16$
$v_2 = 1156$ $v_3 = 111556$ autrement dit en injectant 15 après le dernier 1 d'un terme on obtient le suivant.

1) Complétez la phrase suivante : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 ,v_n s'écrit avec n chiffres égaux à 1, suivis de $(n-1)$ chiffres égaux à 5 et d'un chiffre 6
2) $v_n = 1 \times 10^{2n-1} + 1 \times 10^{2n-2} + \cdots + 1 \times 10^n + 5 \times 10^{n-1} + 5 \times 10^{n-2} + \cdots + 5 \times 10^1 + 6$
$= (10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 10^n) + 5(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1) + 6$ je reconnais par deux fois la somme de termes de (u_n) la suites géométrique de raison 10 et de premier terme 1 on a donc :
$v_n = (u_{2n-1} + u_{2n-2} + u_n) + 5(u_{n-1} + \cdots + u_1) + 6 = \frac{u_n(10^{2n-1-(n)+1}-1)}{10-1} + \frac{5u_1(10^{n-1-(1)+1}-1)}{10-1} + 6$
$= \frac{10^n\,(10^n-1)}{9} + \frac{50(10^{n-1}-1)}{9} + 6 = \frac{10^{2n}-10^n+5\times10^n-50+54}{9} = \frac{10^{2n}+4\times10^n+4}{9}$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{10^{2n}+4\times10^n+4}{9}$
4) $\frac{10^{2n}+4\times10^n+4}{9} = \frac{(10^n)^2+2\times10^n\times2+2^2}{3^2} = \frac{(10^n+2)^2}{3^2} = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$
Soit un entier naturel non nul n, $a_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2} = \frac{10^n+2}{3}$ ainsi $a_2 = \frac{(10^2+2)}{3} = \frac{102}{3} = 34$
$a_4 = \frac{1000+2}{3} = 334$ et $a_5 = \frac{10000+2}{3} = 3334$
5) pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 ,a_n s'écrit avec $n-1$ chiffres égaux à 3, suivis de d'un chiffre 4.
6) $a_n = 3(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1) + 4 = 3\,\frac{10(10^{n-1-1+1}-1)}{10-1} + 4 = \frac{3(10^n-10)+36}{9} = \frac{3\times10^n+6}{9} = \frac{10^n+2}{3}$
ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{10^n+2}{3}$

Exercice 2

La population de coccinelles augmente de 4% tous les ans et 50 coccinelles meurent. Elle compte 3000 insectes en 2012.

On appelle (u_n) la population de coccinelles en l'année $2012 + n$ (n est un entier naturel).

<u>Partie 1</u>

1) calculer $u_0 = 3\,000$, $u_1 = 3\,000\left(1 + \frac{4}{100}\right) - 50 = 3\,070$ et $u_2 = 3\,070\left(1 + \frac{4}{100}\right) - 50 = 3\,142{,}8$
2) $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 50$
3) **Algorithme**

Algorithme	**programme TI**	**Programme Casio**
Demander N	Prompt N	''N''?→N↲
Assigner 3000 à la variable U	3000→U	3000→U↲
Pour I allant de 1 à N	For(I,1,N)	for 1→I To N ↲
assigner à U la valeur de 1.04U-50	1.04U-50→U	1.04U-50→U↲
fin du pour	End	Next↲
Afficher U	Disp U	U↲

5) $u_6 =$ et $u_{2023-2012} = u_{11} =$
6) **Algorithme**

Algorithme	**programme TI**	**Programme Casio**
Assigner 0 à la variable N	0→N	0→N↲
Assigner 3000 à la variable U	3000→U	3000→U↲
Tant queU<6000	While U<6000	While U<6000 ↲
assigner à U la valeur de 1.04U-50	1.04U-50→U	1.04U-50→U↲
assigner à N la valeur N+1	N+1→N	N+1→N↲
fin du pour	End	WhileEnd↲
Afficher N	Disp N	N↲

Partie 2

On pose (v_n) la suite qui a tout entier naturel n associe le nombre $v_n = u_n - 1250$.

1) Calculer $v_0 = u_0 - 1250 = 1750$, $v_1 = u_1 - 1250 = 1820$, $v_2 = 1892{,}8$. Si on effectue les quotient des $v_1$et v_2 par les termes qui les précèdent on obtient $\frac{v_1}{v_0} = \frac{1820}{1750} = 1{,}04$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1892{,}8}{1820} = 1{,}04$ la suite (v_n) semble être géométrique de raison 1,04 et de premier terme $v_0 = 1750$
2) Preuve de la conjecture
   a. Exprimer $v_{n+1} = u_{n+1} - 1250 = (1{,}04u_n - 50) - 1250 = 1{,}04u_n - 1300.$
   b. $v_{n+1} = 1{,}04u_n - 1{,}04 \times 1250 = 1{,}04(u_n - 1250) = 1{,}04v_n$ donc la suite est bien géométrique de raison 1,04.
3) On en déduit que $v_n = 1750 \times 1{,}04^n$ pour tout entier naturel n, or $v_n = u_n - 1250$ et donc $u_n = v_n + 1250 = 1750 \times 1{,}04^n + 1250$
4) 2030 il y aura0020$u_{2030-2012} = u_{18} = 1750 \times 1{,}04^{18} + 1250 \approx 4795{,}18 \approx 4795$ coccinelles.
5) Entre 2022 et 2027 autrement dit entre les années $n = 10$ et $n = 15$ la moyenne du nombre de coccinelles sera de $\frac{u_{10}+u_{11}+\ldots+u_{15}}{6} = \frac{(1750\times1{,}04^{10}+1250)+(1750\times1{,}04^{11}+1250)+\ldots+(1750\times1{,}04^{15}+1250)}{6} = \frac{1750(1{,}04^{10}+1{,}04^{11}+\ldots+1{,}04^{15})+1250\times6}{6} = 1250 + \frac{1750}{6}\frac{1{,}04(1{,}04^{15-10+1}-1)}{1{,}04-1} = 1250 + \frac{1820}{6}\frac{(1{,}04^{6}-1)}{0{,}04} \approx 3262$