DM 3 (facultatif) pour Jeudi 3 octobre 9h au plus tard

Bonification si rendu mercredi

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 - 0{,}1n$ determiner la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.

2) Soit (v_n)la suite définie $\forall n \geq 5$ par $v_n = 3 + \frac{1}{4-n}$ déterminer la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.

3) Soit (w_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{5n^2-0{,}1n}{n^3-5n+4}$ determiner la limite de cette suite en utilisant les opérations sur les limites de suites.

4) Soit (x_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $x_n = \sqrt{n^3+5n}$ après une factorisation apparentée à la méthode pour lever l'indétermination faite le nécessaire pour utiliser un théorème de comparaison et conclure.

DM 3 (facultatif) pour Jeudi 3 octobre 9h au plus tard

Bonification si rendu mercredi

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 - 0{,}1n$ determiner la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.

2) Soit (v_n)la suite définie $\forall n \geq 5$ par $v_n = 3 + \frac{1}{4-n}$ déterminer la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.

3) Soit (w_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{5n^2-0{,}1n}{n^3-5n+4}$ determiner la limite de cette suite en utilisant les opérations sur les limites de suites.

4) Soit (x_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $x_n = \sqrt{n^3+5n}$ après une factorisation apparentée à la méthode pour lever l'indétermination faite le nécessaire pour utiliser un théorème de comparaison et conclure.

DM 3 (facultatif) pour Jeudi 3 octobre 9h au plus tard

Bonification si rendu mercredi

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 - 0{,}1n$ determiner la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.

2) Soit (v_n)la suite définie $\forall n \geq 5$ par $v_n = 3 + \frac{1}{4-n}$ déterminer la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.

3) Soit (w_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{5n^2-0{,}1n}{n^3-5n+4}$ determiner la limite de cette suite en utilisant les opérations sur les limites de suites.

4) Soit (x_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $x_n = \sqrt{n^3+5n}$ après une factorisation apparentée à la méthode pour lever l'indétermination faite le nécessaire pour utiliser un théorème de comparaison et conclure.

DM 3 (facultatif) pour Jeudi 3 octobre 9h au plus tard

Bonification si rendu mercredi

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 - 0{,}1n$ determiner la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.

2) Soit (v_n)la suite définie $\forall n \geq 5$ par $v_n = 3 + \frac{1}{4-n}$ déterminer la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.

3) Soit (w_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{5n^2-0{,}1n}{n^3-5n+4}$ determiner la limite de cette suite en utilisant les opérations sur les limites de suites.

4) Soit (x_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $x_n = \sqrt{n^3+5n}$ après une factorisation apparentée à la méthode pour lever l'indétermination faite le nécessaire pour utiliser un théorème de comparaison et conclure.

Correction DM 3

1) En gras est écrit ce qui doit figurer sur la copie, le reste c'est de la méthode.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 - 0{,}1n$ determiner la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.
Premièrement (dans ma tête): je conjecture la limite : je peux remplacer n par une très grande valeur, ou tout simplement utiliser les règles d'opérations sur les limites.
Deuxièmement : armé de ma conjecture, ici la suite diverge vers $-\infty$, j'identifie la définition adéquate :
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq A$
L'approche sera donc : on prend un A quelconque et on doit trouver le fameux n_0 à partir duquel j'ai les termes de ma suite qui sont inférieurs à A
Troisièmement (au brouillon): je me dit bon supposons que j'ai un terme qui soit inférieur à A, qu'est-ce que je peux en déduire sur son indice ? $u_n \leq A$
$\Leftrightarrow 5 - 0{,}1n \leq A$
$\Leftrightarrow 5 - A \leq 0{,}1n \Leftrightarrow \frac{5-A}{0{,}1} \leq n \Leftrightarrow 10(5-A) \leq n$
J'en déduis que qu'un terme u_n de la suite est en dessous de A si et seulement si $n \geq 10(5-A)$
Quatrièmement (Au propre) :
Pour prouver que c'est vrai pour tout A, je dois prendre un A quelconque et montrer que ça marche pour lui. Je commence donc par :
Soit $A \in \mathbb{R}$, je pose $n_0 = 10(5-A)$
Pour le lecteur ça semble sortit de nulle part. Donc on lui prouve maintenant que notre choix est tout à fait judicieux.
On veut montrer que quel que soit le $n \geq n_0$ on aura $u_n \leq A$
Donc on en prend un n qui sera audessus de n_0 et on va montrer que ça marche pour lui.
Soit $n \geq n_0$ alors $n \geq n_0 \geq 10(5-A)$ donc $n \geq 10(5-A)$ donc $0{,}1n \geq 5 - A$ donc $A \geq 5 - 0{,}1n$ donc $A \geq u_n$
On a tout simplement refait la démonstration cherchée au brouillon à l'envers.
On a donc $\forall n \geq n_0, A \geq u_n$
En effet si ça marche pour un $n \geq n_0$ « quelconque » alors ça marchera pour tous les $n \geq n_0$
Et Donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq A$
En effet on a fait toute notre démonstration pour un seuil A quelconque, donc pour un autre seuil A' on aurait fait la même chose, donc ça marchera pour tous les seuils A réels.

2) Soit (v_n)la suite définie $\forall n \geq 5$ par $v_n = 3 + \frac{1}{4-n}$ déterminer la limite de cette suite en utilisant la définition des limites de suites.
Premièrement (dans ma tête): je conjecture la limite : je peux remplacer n par une très grande valeur, ou tout simplement utiliser les règles d'opérations sur les limites.
Deuxièmement : armé de ma conjecture, ici la suite diverge vers 3, j'identifie la définition adéquate : pour tout intervalle ouvert $]p;q[$ contenant 3 , il existe un rang n_0 à partir duquel $p < v_n < q$
L'approche sera donc : on prend un p<3 et un q>3 quelconques et on doit trouver le fameux n_0 à partir duquel j'ai les termes de ma suite seront dans $]p;q[$
Troisièmement (au brouillon): je me dit bon supposons que j'ai un terme qui soit inférieur à A, qu'est-ce que je peux en déduire sur son indice ? $p < v_n < q$
$p < v_n \Leftrightarrow p < 3 + \frac{1}{4-n} \Leftrightarrow p - 3 < \frac{1}{4-n} \Leftrightarrow \frac{1}{p-3} > 4 - n$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_*^-$ et que les deux membres sont négatifs strictement.
$\Leftrightarrow n > 4 - \frac{1}{p-3}$
$v_n < q \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{4-n} < q \Leftrightarrow \frac{1}{4-n} < q - 3$ ce qui est vrai du moment qu'on a bien $n \geq 5$
Ainsi il me faut que $n > 4 - \frac{1}{p-3}$ (l'inégalité est stricte !!!) et que $n \geq 5$
Quatrièmement (Au propre) :
Pour prouver que c'est vrai pour tout A, je dois prendre un A quelconque et montrer que ça marche pour lui. Je commence donc par :
Soit p et q deux réels tels que $p < 3 < q$, je pose $n_0 = max(5; \left(4 - \frac{1}{p-3}\right) + 1)$
Pour le lecteur ça semble sortit de nulle part. Donc on lui prouve maintenant que notre choix est tout à fait judicieux.
On veut montrer que quel que soit le $n \geq n_0$ on aura $u_n \in]p;q[$
Donc on en prend un n qui sera audessus de n_0 et on va montrer que ça marche pour lui.
Soit $n \geq n_0$ alors $n \geq n_0 \geq 5$ donc $4 - n < 0$ et donc $\frac{1}{4-n} < 0$ or $q > 3$ donc $\frac{1}{4-n} < q - 3$ donc $\frac{1}{4-n} + 3 < q$ donc $u_n < q$
De plus $n \geq n_0 \geq (4 - \frac{1}{p-3}) + 1$ donc $n > 4 - \frac{1}{p-3}$ donc $\frac{1}{p-3} > 4 - n$ donc $p - 3 < \frac{1}{4-n}$ donc $p < 3 + \frac{1}{4-n}$ donc $p < u_n$
Ainsi on a bien $p < u_n < q$
On a tout simplement refait la démonstration cherchée au brouillon à l'envers.
On a donc $\forall n \geq n_0, p < u_n < q$

En effet si ça marche pour un $n \geq n_0$ « quelconque » alors ça marchera pour tous les $n \geq n_0$

pour tout intervalle ouvert $]p;q[$ contenant 3 , il existe un rang n_0 à partir duquel $p < v_n < q$

En effet on a fait toute notre démonstration pour un intervalle ouvert contenant 3 quelconque, donc pour un autre intervalle ouvert on aurait fait la même chose, donc ça marchera pour tous les intervalles ouvert A réels.

3) Soit (w_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{5n^2-0,1n}{n^3-5n+4}$ determiner la limite de cette suite en utilisant les opérations sur les limites de suites.

Pour lever ce genre d'indétermination la méthode de factorisation par le terme le plus puissant est très efficace.

$$\boldsymbol{w_n = \frac{5n^2-0,1n}{n^3-5n+4} = \frac{n^2\left(5-\frac{0,1}{n}\right)}{n^3\left(1-\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)} = \frac{n^2}{n^3}\frac{\left(5-\frac{0,1}{n}\right)}{\left(1-\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)} = \frac{1}{n}\frac{\left(5-\frac{0,1}{n}\right)}{\left(1-\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}}$$

$$\boldsymbol{\left\{\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}\lim_{n\to+\infty} 5-\frac{0,1}{n}=5\\ \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3}=1\end{matrix}\right\} donc\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(5-\frac{0,1}{n}\right)}{\left(1-\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}=5\ par\ quotient\\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\end{matrix}\right\} \lim_{n\to+\infty} w_n = 0}$$

J'ai été obligé d'écrire des accolades à gauche, c'est juste à cause d'une limitation du logiciel.

4) Soit (x_n)la suite définie pour tout entier naturel n par $x_n = \sqrt{n^3+5n}$ après une factorisation apparentée à la méthode pour lever l'indétermination faite le nécessaire pour utiliser un théorème de comparaison et conclure.

La racine est très problématique, on comprends intuitivement que cette suite va tendre vers $+\infty$, mais pour le prouver on n'a pas le droit d'utiliser les opérations. On va donc tenter de trouver une suite plus petite que (x_n) et divergeant vers $+\infty$.

$x_n = \sqrt{n^3+5n}$ or vu que n est un entier naturel on a $0 \leq 5n$
donc $n^3 \leq n^3 + 5n$ ces nombres étant positifs et la fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ on aura $\sqrt{n^3} \leq \sqrt{n^3+5n}$ or $\sqrt{n^3} = n\sqrt{n}$

$$\boldsymbol{\left\{\begin{matrix}\lim_{n\to+\infty} n=+\infty\\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty\end{matrix}\right\} donc\ \lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty\ par\ produit}$$

Comme $x_n \geq n\sqrt{n}$ on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ par comparaison.