Suites fiche 2
Entre la 1s et la Ts

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1=\frac{2}{1+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}} \end{cases}$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$.

P_n: "$0 \leq u_n \leq 3$"
Initialisation
Pour $= 0$, $u_n = u_0 = 3$, or $0 \leq 3 \leq 3$ donc on a bien $0 \leq u_n \leq 3$ pour $n = 0$
Hérédité
Soit un entier k tel que P_k est vraie , montrons que P_{k+1}

$0 \leq u_k \leq 3$ (HR)

donc $1 \leq u_k + 1 \leq 4$ donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_k} \leq 1$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{1+u_k} \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \mathrm{u}_{\mathrm{k+1}} \leq 2$

donc $0 \leq \mathrm{u}_{\mathrm{k+1}} \leq 3$ donc P_{k+1} est vraie d'où l'hérédité
Conclusion
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$

2) Démontrer que la suite (v_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ est géométrique.

$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ donc :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{2 - (1+u_n)}{2 + 2(1+u_n)} = \frac{1 - u_n}{4 + 2u_n}$$

$$= \frac{1 - u_n}{2(2 + u_n)} = \frac{1}{2} v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

3) En déduire une expression de v_n en fonction de n puis une de u_n en fonction de n.

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$ on aura donc $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{v_n} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) En déduire la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

On a une suite géométrique dont la raison est comprise entre -1 et 1 donc elle converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

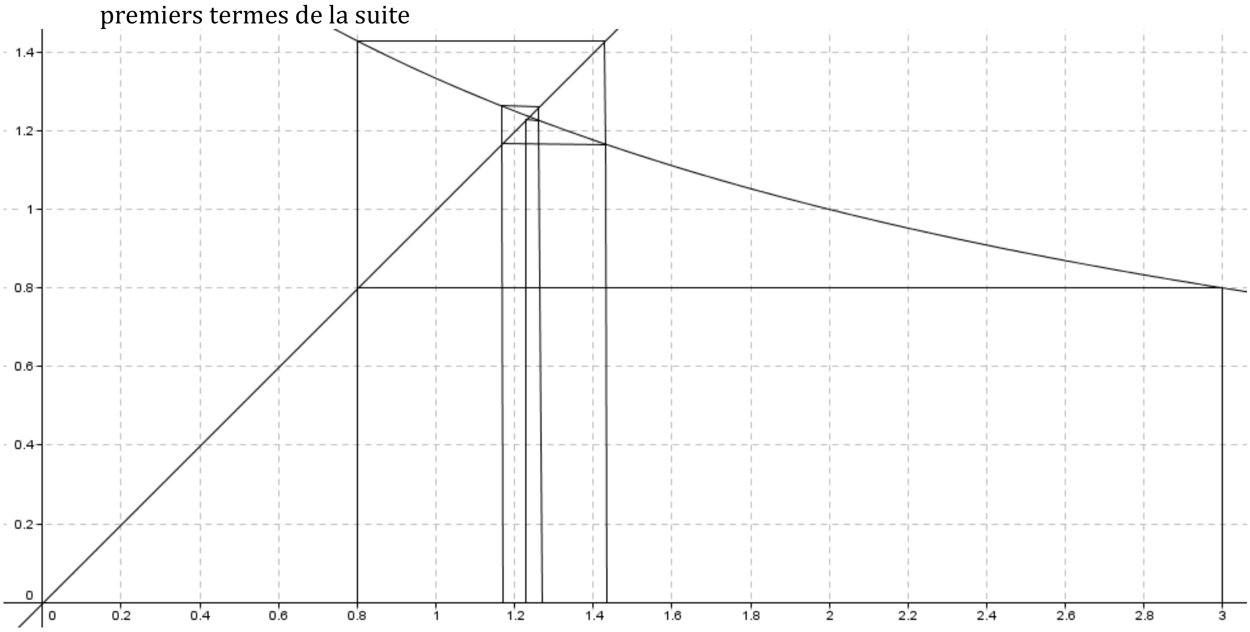
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$ On sait que $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - 2\mathrm{v_n}$

$\Leftrightarrow (v_n - 1)u_n = -1 - 2\mathrm{v_n}$ donc $u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\frac{1}{-1} = 1$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4}{\mathrm{u_n} + 2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Utiliser la représentation graphique des fonctions $f(x) = \frac{4}{x+2}$ et $g(x) = x$ pour déterminer graphiquement les premiers termes de la suite



2) Vérifier ces valeurs par le calcul

$u_1 = \frac{4}{\mathrm{u_0} + 2} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ $u_2 = \frac{4}{0{,}8 + 2} = \frac{10}{7} \approx$ $u_2 = \frac{4}{\frac{10}{7} + 2} = \frac{7}{6} \approx 1{,}167$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{-4}{4+u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, -2 < u_n \leq 0$

P_n: " $-2 \leq u_n \leq 0$"

Initialisation

Pour $= 0$, $u_n = u_0 = 0$, or $-2 \leq 0 \leq 0$ donc on a bien $-2 \leq u_n \leq 0$ pour $n = 0$

Hérédité

Soit un entier k tel que P_k est vraie , montrons que P_{k+1}

$-2 \leq u_k \leq 0$ (HR)

donc $2 \leq u_k + 4 \leq 4$ donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_k} \leq \frac{1}{2}$ donc $-2 \leq \frac{-4}{1+u_k} \leq -1$ donc $-2 \leq u_{k+1} \leq -1$

donc $-2 \leq u_{k+1} \leq 0$ donc P_{k+1} est vraie d'où l'hérédité

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, -2 \leq u_n \leq 0$

2) Etudier le sens de variation de (u_n).

$u_{n+1} - u_n = \frac{-4}{4+u_n} - u_n = \frac{-4}{4+u_n} - \frac{4u_n+u_n^2}{4+u_n} = -\frac{u_n^2+4u_n+4}{4+u_n} = \frac{-(u_n+2)^2}{4+u_n}$ comme $-2 \leq u_n \leq 0$ le dénominateur est positif et le numérateur est négatif donc le quotient est négatif. Donc la suite est décroissante

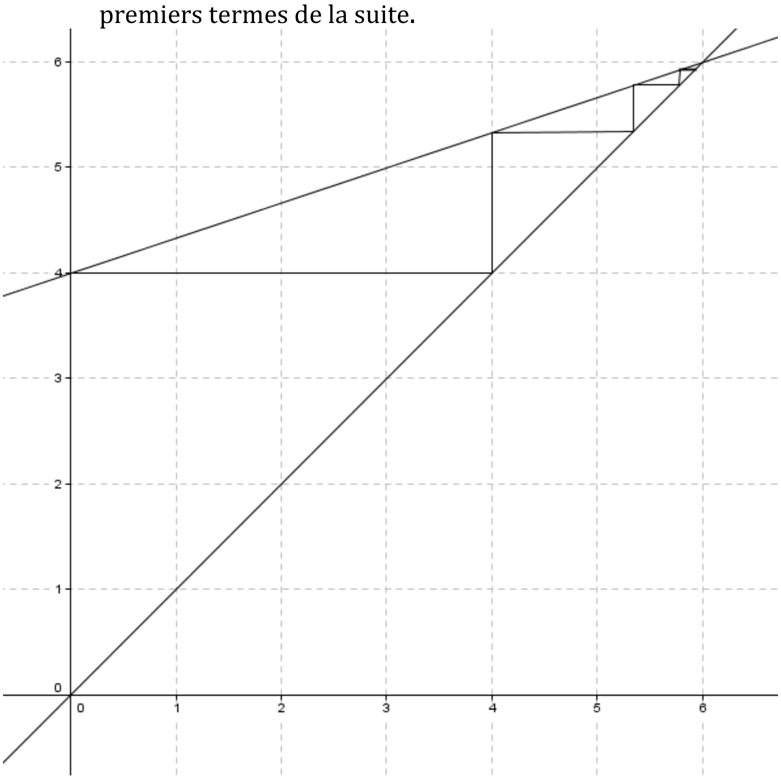
3) En déduire la limite de (u_n).

La suite étant décroissante et minorée par -2 , on sait qu'elle converge et que sa limite est supérieure ou égale à -2

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1=\frac{u_n}{3}+4, \forall n \in \mathbb{N}} \end{cases}$

1) Utiliser la représentation graphique des fonctions $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ et $g(x) = x$ pour déterminer graphiquement les premiers termes de la suite.



2) Vérifier ces valeurs par le calcul

$u_1 = \frac{u_0}{3} + 4 = 4$ $u_2 = \frac{u_1}{3} + 4 = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$ $u_3 = \frac{u_1}{3} + 4 = \frac{52}{9} \approx$

Exercice 5

Dire en justifiant si les suites (u_n) définies ci-dessous sont arithmétiques, géométriques ou ni l'un ni l'autre. Dans le cas où elles sont arithmétiques ou géométriques, préciser le premier terme et la raison.

1) $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ 2) $u_n = n - 5$ 3) $u_n = \frac{1}{3^n}$ 4) $u_n = 2\frac{5^{2n+1}}{7^{3(n+1)}}$

Ici on utilise les deux manières différentes de décrire les suites arithmétiques et géométriques, en fonction de n et par récurrence.

arithmétique : géométrique

$\begin{cases} u_0 = \cdots \\ u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $u_n = u_0 + nr$ $\begin{cases} u_0 = \cdots \\ u_{n+1} = \mathrm{q}u_n \end{cases}$ 4) $u_n = u_0 q^n$

1) $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 1\,, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ 2) $u_n = n - 5$ 3) $u_n = \frac{1}{3^n}$ 4) $u_n = 2\frac{5^{2n+1}}{7^{3(n+1)}}$

1) arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = -5$ 2) arithmétique de raison -1 et de premier terme $u_0 = -5$

2) géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$ 3) $u_n = 2\frac{5^{2n+1}}{7^{3(n+1)}} = 2\frac{5^{2n}5}{7^{3n}7^3} = \frac{2\times 5}{7^3} \times \frac{(5^2)^n}{(7^3)^n} = \frac{2\times 5}{7^3} \times \left(\frac{5^2}{7^3}\right)^n$

Donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{2\times 5}{7^3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{5^2}{7^3}$

Exercice 6 étude d'une suite du type $u_{n+1} = a \times u_n + b$

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n + \alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$).

1) Déterminer α pour que (v_n) soit une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

$v_n = u_n + \alpha$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$ or $u_{n+1} = 3u_n - 2$ donc $v_{n+1} = 3u_n - 2 + \alpha$ or $v_n = u_n + \alpha$ donc $u_n = v_n - \alpha$

Et donc $v_{n+1} = 3(v_n - \alpha) - 2 + \alpha = 3v_n - 3\alpha - 2 + \alpha = 3v_n - 2\alpha - 2$ pour que la suite (v_n) soit géométrique il faut que $-2\alpha - 2 = 0$ donc que $\alpha = -1$

Dans ce cas on a : $v_{n+1} = 3v_n$ donc une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_1 = u_1 - 1 = 1$

2) Ecrire v_n, puis u_n en fonction de n.

On a donc : $v_n = 3^{n-1}$ et donc $u_n = 3^{n-1} + 1$

<u>Remarque :</u> là on avait une suite géométrique dont le premier terme n'est pas v_0, on peut utiliser la formule $u_n = u_m q^{n-m}$
Que l'on démontre facilement en utilisant $u_n = u_0 q^n$ et $u_m = u_0 q^m$

Exercice 7

Préciser, si possible, les variations et la limite des suites (v_n) suivantes :

1) $v_n = (-1)^n + 1$ 2) $v_n = -3 \times 2^n$ 3) $v_n = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 5$ 4) $v_n = \left(-\frac{5}{3}\right)^{n+1}$

1) ni croissante ni décroissante et non convergente

2) $v_{n+1} - v_n = -3 \times 2^{n+1} - (-3 \times 2^n) = (-3)(2^n 2 - 2^n) = -3 \times 2^n(2-1) = -3 \times 2^n$ la suite est décroissante

Pour montrer la divergence vers $-\infty$, comme 2>1 on a 2^n divergent vers $+\infty$ et donc par multiplication par un nombre négatif -3×2^n diverge vers $-\infty$

3) $v_{n+1} - v_n = \left(3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 5\right) - \left(3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 5\right) = 3\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \times 1\right)$

$= 3\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(\left(-\frac{2}{3}\right) - 1\right)\right) = 3\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = -5\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ le signe de cette expression change pour toute nouvelle valeur de n donc la suite n'est ni croissante ni décroissante.

$-1 < -\frac{2}{3} < 1$ donc $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ converge vers 0 donc $3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ aussi donc $v_n = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 5$ converge vers 5 par somme de limites.

4) $v_n = \left(-\frac{5}{3}\right)^{n+1}$ est une suite géométrique de raison négative donc elle n'est ni croissante ni décroissante, de plus comme sa raison $q = -\frac{5}{3}$ est inférieur à -1 elle n'est pas convergente, et elle ne diverge pas non plus vers $-\infty$ ni vers $+\infty$

Exercice 8

Démontrer par récurrence la formule :

$$P_n: "1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2"$$

Initialisation

Si $n = 0$ ça foire

Si $n = 1$ on a le membre de gauche qui vaut 1 et celui de droite qui vaut aussi 1 donc P_n est vraie pour $n = 1$

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que P_k est vraie , montrons que P_{k+1}est aussi vraie.

(HR) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

Donc $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = k^2 + (2(k+1) - 1)$

Donc $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = k^2 + 2k + 1$

Donc $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$ d'où P_{k+1} vraie d'où l'hérédité

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$est vraie

Exercice 9

Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $3n^2 + 3n + 6$ est un multiple de 6.

P_n : « $3n^2 + 3n + 6$ est un multiple de 6 »

Initialisation

Si $n = 0$ on a : $3n^2 + 3n + 6 = 6$ or 6 est bien un multiple de 6 donc P_n est vraie pour $n = 0$

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie , montrons que P_{k+1} est aussi vraie.

(HR) $\exists b \in \mathbb{N}, 3k^2 + 3k + 6 = 6b$ donc $3k^2 = 6b - 3k - 6$

$$\begin{aligned} 3(k+1)^2 + 3(k+1) + 6 &= 3k^2 + 6k + 3 + 3k + 3 + 6 \\ &= 3k^2 + 9k + 12 \\ &= (6b - 3k - 6) + 9k + 12 \\ &= 6b + 6k + 6 \\ &= 6(b + k + 1) \end{aligned}$$

donc $3(k+1)^2 + 3(k+1) + 6$ est un multiple de 6

D'où P_{k+1} vraie, d'où l'hérédité,

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie