Suites fiche 2
Entre la 1s et la Ts

Exercice 1

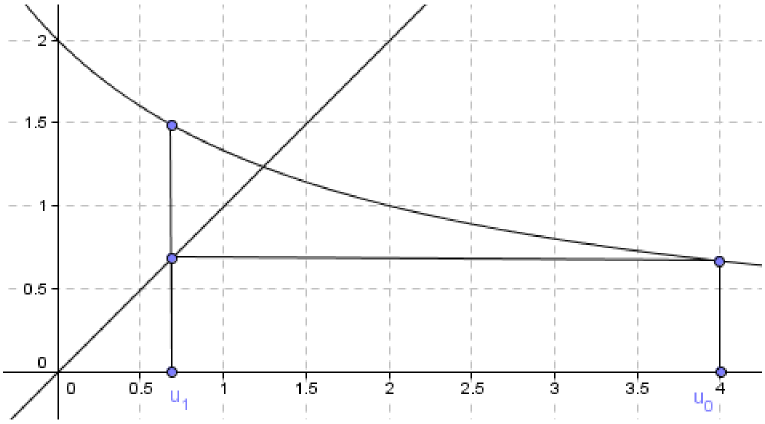
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$.
2) Démontrer que la suite (v_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ est géométrique.
3) En déduire une expression de v_n en fonction de n puis une de u_n en fonction de n.
4) En déduire la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4}{u_n+2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Utiliser la représentation graphique des fonctions $f(x) = \frac{4}{x+2}$ et $g(x) = x$ pour déterminer graphiquement les premiers termes de la suite
2) Vérifier ces valeurs par le calcul



Exercice 3

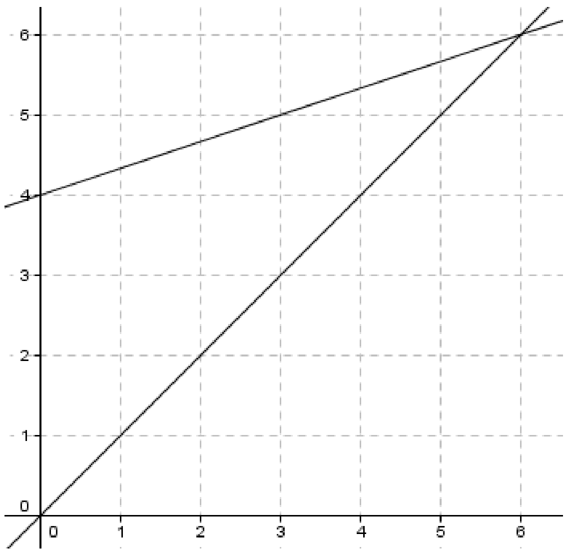
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{-4}{4+u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, -2 < u_n \leq 0$
2) Etudier le sens de variation de (u_n).
3) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + 4, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Utiliser la représentation graphique des fonctions $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ et $g(x) = x$ pour déterminer graphiquement les premiers termes de la suite.
2) Vérifier ces valeurs par le calcul



Exercice 5

Dire en justifiant si les suites (u_n) définies ci-dessous sont arithmétiques, géométriques ou ni l'un ni l'autre. Dans le cas où elles sont arithmétiques ou géométriques, préciser le premier terme et la raison.

1) $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ 2) $u_n = n - 5$ 3) $u_n = \frac{1}{3^n}$ 4) $u_n = 2\frac{5^{2n+1}}{7^{3(n+1)}}$

Exercice 6 étude d'une suite du type $u_{n+1} = a \times u_n + b$

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n + \alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$).

1) Déterminer α pour que (v_n) soit une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Ecrire v_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 7

Préciser, si possible, les variations et la limite des suites (v_n) suivantes :

1) $v_n = (-1)^n + 1$ 2) $v_n = -3 \times 2^n$ 3) $v_n = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 5$ 4) $v_n = \left(-\frac{5}{3}\right)^{n+1}$

Exercice 8

Démontrer par récurrence la formule :
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Exercice 9

Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $3n^2 + 3n + 6$ est un multiple de 6.