Sommaire

Démonstration de $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ avec $u_n = n^2 + 1$

Quelle que soit la méthode il nous faudra poser f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$

Méthode 1
avec les méthodes disponibles en fin de chapitre le plus simple est d'utiliser la composition d'une suite et d'une fonction.
On a : $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{n} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{f(x)} = +\infty$ donc par composition $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{f(n)} = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Méthode 2
Si on veut passer par la définition :
Soit A un réel
Si A≤ 1 je pose $n_0 = 1$

Soit $> n_0$, comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a $f(n) > f(n_0)$ donc $u_n > 1^2 + 1 > A$

Si $A > 1$ je pose $n_0 = E\left(\sqrt{A-1}\right) + 1$

Soit $> n_0$, comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a $f(n) > f(n_0) > f\left(\sqrt{A-1}\right)$ donc $u_n > \sqrt{A-1}^2 + 1$
Donc $u_n > A$

Ainsi la suite u_n a bien pour limite $+\infty$

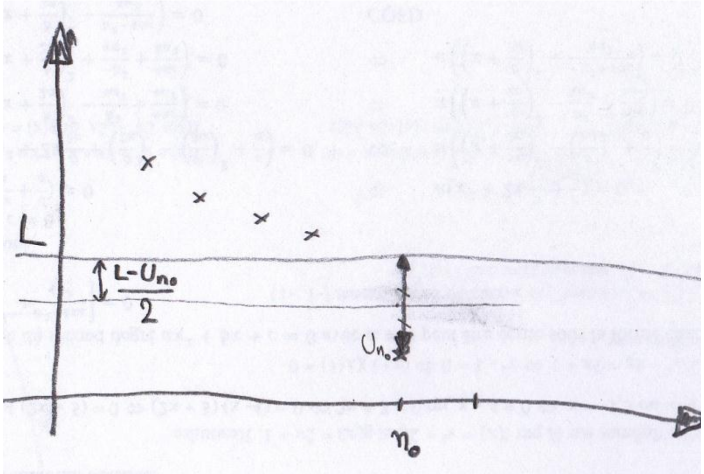
Méthode 3 Le truc atroce vu en classe

Théorème

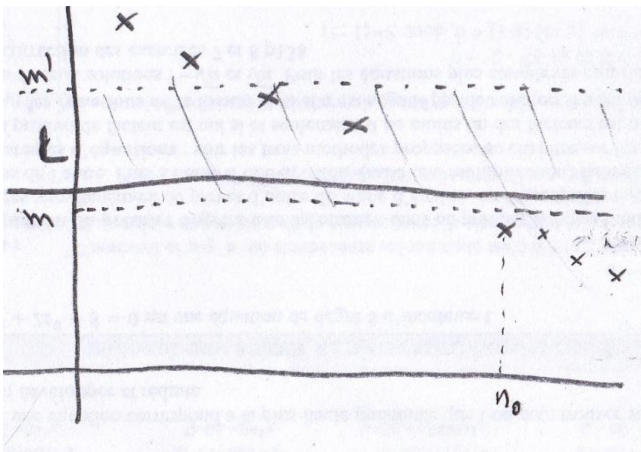
1) Si une fonction est croissante et convergente vers L, alors elle a tous ses termes inférieurs ou égaux à L.
2) Si une fonction est décroissante et convergente vers L, alors elle a tous ses termes supérieurs ou égaux à L.

Démonstration du 2)
Soit (u_n) une suite décroissante et convergente vers L, supposons qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} < L$
Comme (u_n) est décroissante on aura : $\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n_0}$

Avec ε
Je pose $\varepsilon = \frac{L-u_{n_0}}{2}$, ici $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < L - u_{n_0}$ donc $-L + u_{n_0} < -\varepsilon$ donc $L - L + u_{n_0} < L - \varepsilon$ i.e. $u_{n_0} < L - \varepsilon$
(u_n) une suite convergente vers L donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$
Soit $n > \max(n_0; n_1)$ alors $n > n_1$ donc $L - \varepsilon < u_n$ or $u_{n_0} < L - \varepsilon$ donc $u_{n_0} < u_n$
De plus $n > n_0$, donc $u_n \leq u_{n_0}$
il y a donc une contradiction donc tous les termes de la suites seront supérieurs ou égaux à L.



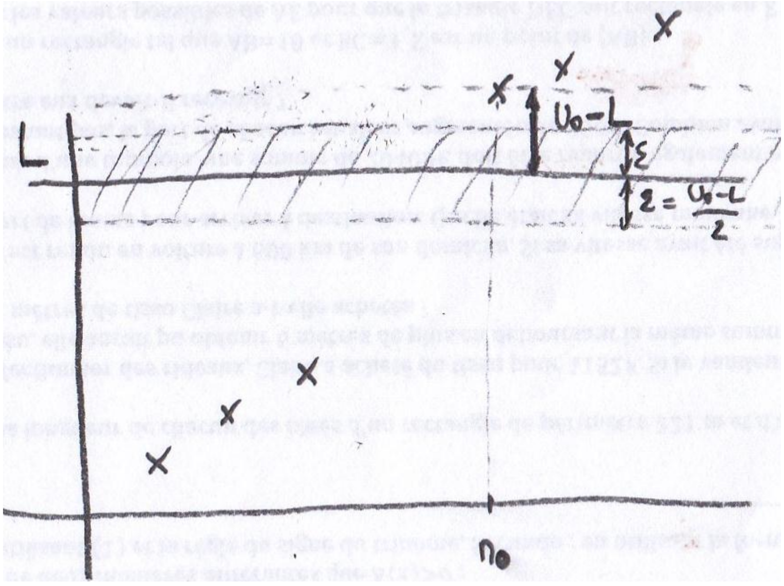
Sans ε
Soit m et m' deux réels vérifiant : $u_{n_0} < m < L$ et $L < m'$, donc $I =]m; m'[$ et un intervalle contenant L donc comme (u_n) une suite convergente vers L donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, u_n \in I$
Soit $n > \max(n_0; n_1)$ alors $n > n_1$ donc $u_n \in I$ donc $m < u_n$ or $u_{n_0} < m$donc $u_{n_0} < m < u_n$
De plus $n > n_0$, donc $u_n \leq u_{n_0}$
il y a donc une contradiction donc tous les termes de la suites seront supérieurs ou égaux à L.



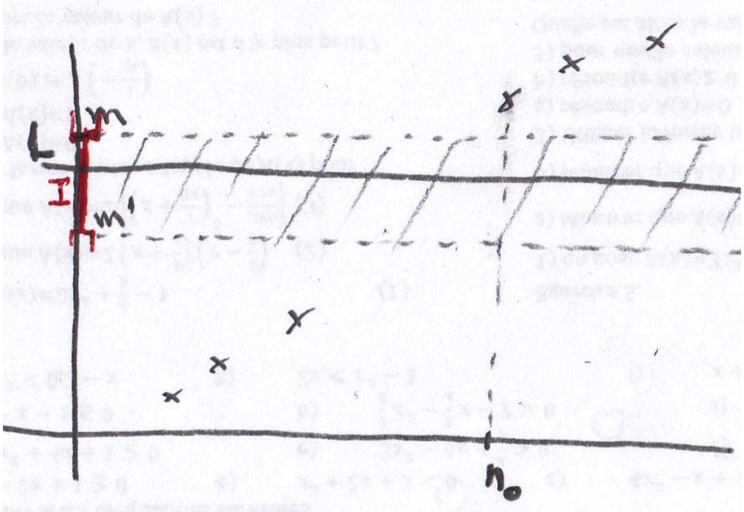
Démonstration du 1)
Soit (u_n) une suite croissante et convergente vers L, supposons qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > L$
Comme (u_n) est croissante on aura : $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$

Avec ε
Je pose $\varepsilon = \frac{u_{n_0}-L}{2}$, ici $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < u_{n_0} - L$ donc $\varepsilon + L < u_{n_0}$donc $L - L + u_{n_0} < L - \varepsilon$ i.e. $u_{n_0} < L - \varepsilon$

(u_n) une suite convergente vers L donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, L-\varepsilon < u_n < L+\varepsilon$
Soit $n > \max(n_0; n_1)$ alors $n > n_1$ donc $u_n < L+\varepsilon$ or $\varepsilon + L < u_{n_0}$ donc $u_n < u_{n_0}$
De plus $n > n_0$, donc $u_n \geq u_{n_0}$
il y a donc une contradiction donc tous les termes de la suites seront inférieurs ou égaux à L.



Sans ε
Soit m et m' deux réels vérifiant : $L < m < u_{n_0}$ et $m' < L$, donc $I =]m'; m[$ et un intervalle contenant L donc comme (u_n) une suite convergente vers L donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, u_n \in I$
Soit $n > \max(n_0; n_1)$ alors $n > n_1$ donc $u_n \in I$ donc $u_n < M$ or $m < u_{n_0}$ donc $u_n < m < u_{n_0}$
De plus $n > n_0$, donc $u_n \geq u_{n_0}$
il y a donc une contradiction donc tous les termes de la suites seront inférieurs ou égaux à L.



Aide pour les exercices 43 à 46 P34

Prérequis :
De la classe de 1ère S
1) qu'est-ce qu'une suite arithmétique ? C'est toute suite de la forme :
$\begin{cases} u_0 = un\ nombre \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ (définition par récurrence) ou $u_n = u_0 + nr$ (définition en fonction de n)
2) qu'est-ce qu'une suite géométrique ? C'est toute suite de la forme :
$\begin{cases} u_0 = un\ nombre \\ u_{n+1} = u_n \times q \end{cases}$ (définition par récurrence) ou $u_n = u_0 q^n$ (définition en fonction de n)
3) somme des termes d'une suite arithmétique : $\sum_{i=0}^{n} u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{(n+1)(2u_0+nr)}{2}$
4) somme des termes d'une suite géométrique : $\sum_{i=0}^{n} u_n = \frac{u_0-u_{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
5) De la classe de terminale (voir les exercices sur les récurrences) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Exercices similaires au 43 à 46

$\sum_{i=0}^{n}(7i+11) = ?$
je reconnais la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 11$ et de raison 7
$\sum_{i=0}^{n}(7i+11) = \frac{(n+1)(11+(7n+11))}{2} = \frac{(n+1)(22+7n)}{2}$

$\sum_{i=0}^{n} 5 \times 8^{-i} = ?$
$\sum_{i=0}^{n} 5 \times 8^{-i} = \sum_{i=0}^{n} 5 \times \left(\frac{1}{8}\right)^i$ je reconnais la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{8}$ donc $\sum_{i=0}^{n} 5 \times 8^{-i} = 5\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{8}\right)} = 5\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{\frac{7}{8}} = 5 \times 8\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{7} = \frac{40}{7}\left(1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right)$

$\sum_{i=0}^{n}(5i^2-3i) = ?$
$\sum_{i=0}^{n}(5i^2-3i) = \sum_{i=0}^{n} 5i^2 - \sum_{i=0}^{n} 3i = 5\sum_{i=0}^{n} i^2 - 3\sum_{i=0}^{n} i = 5\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3\big((n+1)(0+n)\big)}{2}$ (prérequis 5 et 3)
$= 5\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - \frac{9n^2+9n}{6} = \frac{10n^3+6n^2-4n}{6} = \frac{n(5n^2+3n-4)}{3}$

Exercice 58P35

1) soit P_n : « on a : $0 \leq u_n < \frac{3}{4}$ »

Initialisation :

Pour $n = 0, u_n = u_0 = \frac{2}{7}$ donc P_0est vraie.

Hérédité :

Soit k tel que P_k est vrai, montrons que P_{k+1} est vrai.

$0 \leq u_k < \frac{3}{4}$ (HR)

$\Leftrightarrow$ $0 \leq \frac{1}{3}u_k < \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} \leq u_{k+1} < \frac{3}{4}$

Donc $0 \leq u_{k+1} < \frac{3}{4}$ (attention c'est une implication simple et non une équivalence, on ne peut remonter)

D'où l'hérédité

Conclusion :

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < \frac{3}{4}$

2) pour voir l'intérêt d'un algorithme, il faut faire preuve d'imagination. Il faut s'imaginer qu'on le « lance », on lit ligne après ligne et on exécute les opérations proposées sur le papier. Il faut ensuite analyser les résultats obtenus. Une autre approche si on sait programmer un minimum est de taper le programme sur la calculatrice et de le lancer plusieurs fois.
Ici le programme calculs les termes de la suite et s'arrête lorsqu'on dépasse un seuil M , avec M compris strictement entre 0 et trois quarts. Le programme donne alors le rang pour lequel la suite dépasse pour la première fois la valeur M.

3) sur la Ti 82 on obtient :

```
: Prompt M
: 0 → N
: 2/7→U
: While U<M
: N+1→ N
: U/3+1/2 → U
: End
: Disp N
```

4) plus on prendra des valeurs de M proches de ¾ plus le rang N obtenu sera élevé.

5) ¾ semble être le plus petit des majorants de la suite (u_n)

6) On pose A_n : « $\frac{3}{4} - u_n = \frac{13}{28\times 3^n}$ »

Initialisation :

Pour $n = 0, u_n = u_0 = \frac{2}{7}$ donc $\frac{3}{4} - u_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{13}{28}$ et $\frac{13}{28\times 3^n} = \frac{13}{28}$ donc A_0est vraie.

Hérédité :

Soit k tel que A_k est vrai i.e. $\frac{3}{4} - u_k = \frac{13}{28\times 3^k}$ ou encore $\frac{3}{4} - \frac{13}{28\times 3^k} = u_k$, montrons que A_{k+1} est vrai.

$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{28\times 3^k}\right) + \frac{1}{2}$ (HR)

$= \frac{1}{4} - \frac{13}{28\times 3^{k+1}} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{13}{28\times 3^{k+1}}$ donc $\frac{3}{4} - u_{k+1} = \frac{13}{28\times 3^{k+1}}$

D'où l'hérédité

Conclusion :

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3}{4} - u_n = \frac{13}{28\times 3^n}$

7) $\lim_{n\to+\infty}\frac{13}{28\times3^n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4}-u_n=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{3}{4}$

Version avec ε (vue en classe avec G1)

Supposons que l'on ait un majorant M qui soit plus petit que ¾

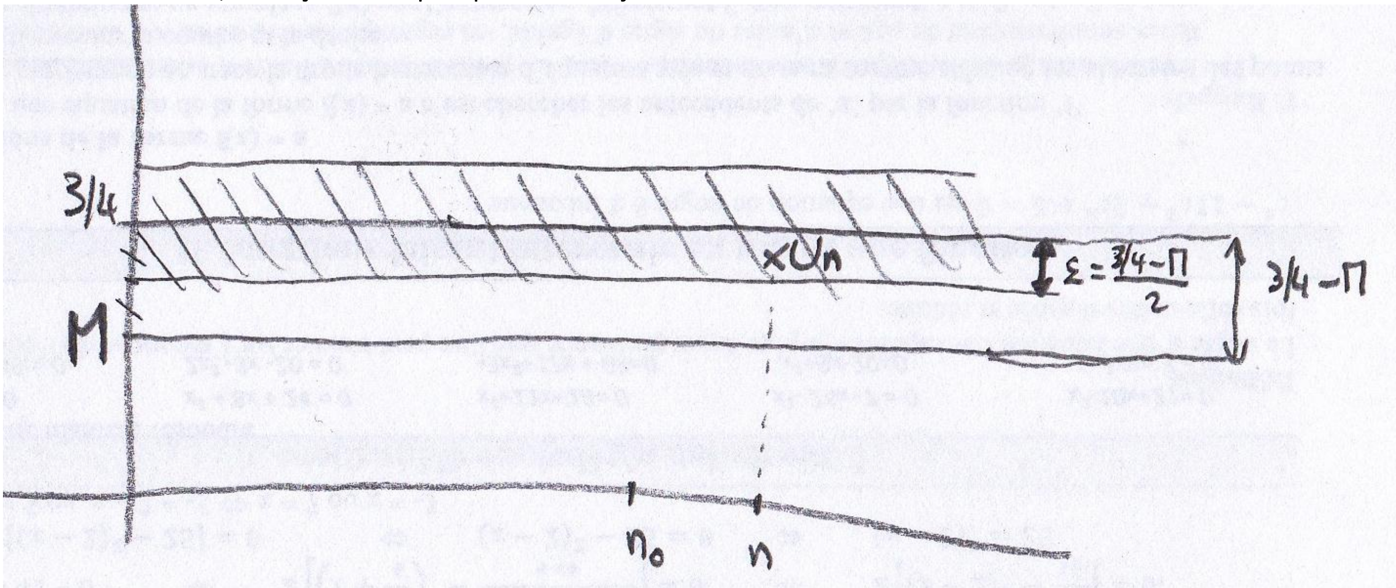
$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{3}{4}$ donc en posant $\varepsilon=\frac{\frac{3}{4}-M}{2}$ on a bien $\varepsilon>0$ et donc $\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n>n_0,\left|u_n-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$

autrement dit : $\frac{3}{4}-\varepsilon<u_n<\frac{3}{4}+\varepsilon$

$\frac{\frac{3}{4}-M}{2}<\frac{3}{4}-M$ donc $\varepsilon<\frac{3}{4}-M$ donc $-\frac{3}{4}+M<-\varepsilon$ donc $M<\frac{3}{4}-\varepsilon$

Ainsi, si l'on prend $n>n_0$ on aura : $\frac{3}{4}-\varepsilon<u_n$ donc $M<\frac{3}{4}-\varepsilon<u_n$ donc $M<u_n$ ce qui contredit le fait que la suite soit majorée par M.

Conclusion : un majorant M ne peut être plus petit que ¾ , de plus d'après la question 1) ¾ est un majorant de la suite, donc ça sera le plus petit des majorants de cette suite



Version alternative (comment faire si on est allergique à ε)

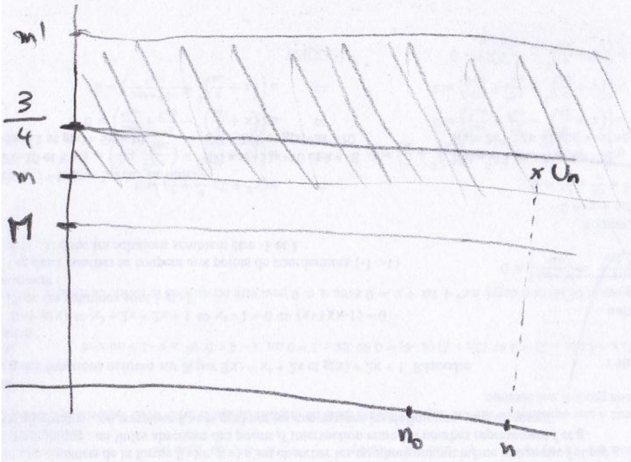
Supposons que l'on ait un majorant M qui soit plus petit que ¾

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{3}{4}$ donc pour tout intervalle ouvert I contenant ¾ on a : $\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n>n_0,u_n\in I$

En posant m et m' deux réels vérifiant : $M<m<\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{4}<m'$, l'intervalle $I=]m;m'[$ contient bien ¾ donc $\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n>n_0,u_n\in I$

si l'on prend $n>n_0$ on aura : $M<m<u_n$ donc $M<u_n$ ce qui contredit le fait que la suite soit majorée par M.

Conclusion : un majorant M ne peut être plus petit que ¾ , de plus d'après la question 1) ¾ est un majorant de la suite, donc ça sera le plus petit des majorants de cette suite



Exercices 59P35

1) Preuve de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{n}^2 = +\infty$

   Si $A \leq 0$ alors on peut prendre $n_0 = 0$

   Si $A > 0$ alors on peut prendre $n_0 = E(\sqrt{A}) + 1$

2) Preuve de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^2} = 0$

   On peut prendre $n_0 = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$

Exercices 60P35

1) Preuve de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

   Si $A \leq 0$ alors on peut prendre $n_0 = 0$

   Si $A > 0$ alors on peut prendre $n_0 = E(A^2) + 1$

2) Preuve de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^2} = 0$

   On peut prendre $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) + 1$

Exercice 61P35

1) L'algorithme calcule les termes de la suite (p_n) jusqu'à ce qu'un d'entre eux soit supérieur à une valeur M choisie par l'opérateur.
2) sur la Ti 82 on obtient :
   : Prompt M
   : 0 → N
   : 10→P
   : While P<M
   : N+1→ N
   : N^2+2N+10 → P
   : End
   : Disp N
3) plus on prend une valeur importante pour M, plus la valeur de N le sera aussi. De manière plus pertinente, on peut mettre le plafond aussi haut que l'on veut , il finira toujours par être creuvé à un moment ou a un autre.

Exercice 64&65P36

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{an^2 + bn + c}{a'n^2 + b'n + c} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)}{n^2\left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)}{\left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c}{n^2}\right)} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a'n+b'}{an^2+bn+c} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(a'+\frac{b'}{n}\right)}{n^2\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{\left(a'+\frac{b'}{n}\right)}{\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(a'+\frac{b'}{n}\right)}{\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)} = \frac{a'}{a} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

Supposons a et a' de même signe

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{an^2+bn+c}{a'n+b'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)}{n\left(a'+\frac{b'}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} n\frac{a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}}{a'+\frac{b'}{n}} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}}{a'+\frac{b'}{n}} = \frac{a}{a'} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases}$$

Exercice 66P36

Si une suite est non majorée ça veut dire que non seulement pour tout réell A, elle arrive à un moment à passer au-dessus mais en plus elle est croissante donc elle continue de monter ou au pire elle stagne donc elle reste au-dessus du seuil A, ce qui correspond à la définition d'une suite divergent vers plus l'infini.

Exercice 67P36

1) contre-exemple $u_n = (-10)^n$ n'est ni majorée ni divergente vers $+\infty$
2) c'est dans la définition de divergente vers $+\infty$: quel que soit le seuil A, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite seront au-dessus, donc elle n'est pas majorée.

Exercice 69P36 éléments de correction

1) $u_n = n^2\left(6 - \frac{1}{n} - 1\right) \to +\infty$ 2) produit de limites $\to -\infty$ 3) $u_n = \frac{1-n}{(1+n)} = \frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}+1} \to -1$

Exercice 71P36 éléments de correction

1) $u_n = n^2(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) \to +\infty$ 2) $6^n \to +\infty$ donc $u_n \to -\infty$
3) $u_n = 3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ or $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 1$ et $3^n \to +\infty$ donc $u_n \to +\infty$

Exercice 77P37

Soit n_0 et n_1 respectivement les indices de la plus petite et de la plus grande des p premières valeurs.
Avant p on a p éléments ils sont tous dans $[u_{n_0}; u_{n_1}]$
Après p , tous les termes sont dans I , soit m' et M' les réels tels que $I = [m'; M']$
Ainsi en prenant $m = \min(u_{n_0}; m')$ et $M = \max(u_{n_1}; M')$ on aura tous les termes qui seront dans [m ;M] et donc la suite est bornée.

Exercice 78P37

Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir du rangn_0 on ait : $|u_n - l| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
Soit un réel positif ε , trouvons le rang à partir duquel on aura toujours $|u_n - l| < \varepsilon$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |v_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$
Posons $n_2 = \max(n_0; n_1)$, soit $n > n_2$ alors $n > n_1$ donc $v_n \leq |v_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$ donc $v_n < \varepsilon$
De plus $n > n_0$ donc $|u_n - l| \leq v_n$
Ainsi on aura : $|u_n - l| \leq v_n < \varepsilon$

Ceci étant valable pour tout réel positif, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l.$

Exercice 79P37

Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$ diverge or elle n'a pas de limite infinie.

Exercice 83P37

1) $n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$ et donc pour n>1 on aura : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{1}{n-1}$
De plus $\sqrt{n+1}$ étant positif on aura : $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n+(-1)^n} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}$ de plus $\frac{\sqrt{n+1}}{n+(-1)^n} = u_n - 1$
Conclusion : $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leq u_n - 1 \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}$
2) $\frac{\sqrt{n+1}}{n-1} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n-1} = 0$
$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et donc par inverse de limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

3) Par théorème d'encadrement les résultats des questions 1 et 2 impliquent que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$ donc (u_n) converge vers 1

Exercice 84P38

Exercice 109P42
Partie A : le nombre d'or

1) $x^2 - x - 1 = 0$ a pour solutions $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$
2) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$ donc $1 < \Phi < 2$
3) $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi$
   $\sqrt{\Phi+1} = \sqrt{\Phi^2} = \Phi \quad \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = -\frac{(1-\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \Phi - 1$

Partie B : une suite !

1) $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
2) Initialisation : $u_1 = 1$ donc pour $n = 1$ j'ai bien $1 \le u_n \le \Phi$
   Hérédité : soit $k \ge 1$ tel que $1 \le u_k \le \Phi$ montrons que c'est vrai au rang suivant
   On a $1 \le u_k \le \Phi$ (HR) donc $2 \le u_k + 1 \le \Phi + 1$ or la fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ on aura :
   $\sqrt{2} \le \sqrt{u_k + 1} \le \sqrt{\Phi+1}$ or $\sqrt{\Phi+1} = \Phi$ donc $\sqrt{2} \le u_{k+1} \le \Phi$ d'où $1 \le u_{k+1} \le \Phi$ d'où l'hérédité.
   Conclusion : $\forall n \ge 1, 1 \le u_n \le \Phi$
3) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - u_n = \frac{(\sqrt{1+u_n}-u_n)(\sqrt{1+u_n}+u_n)}{\sqrt{1+u_n}+u_n} = \frac{\left(\sqrt{1+u_n}^2 - u_n^2\right)}{\sqrt{1+u_n}+u_n} = \frac{1+u_n-u_n^2}{\sqrt{1+u_n}+u_n}$
   étudions $-x^2 + x + 1 = -(x^2 - x - 1)$, ce polynome est donc positif entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.
   Il se trouve que les termes de (u_n) sont dans cet intervalle donc $\frac{1+u_n-u_n^2}{\sqrt{1+u_n}+u_n} \ge 0$ on a donc :
   $u_{n+1} - u_n \ge 0$ donc la suite est croissante.
4) $u_{n+1} - \Phi = \sqrt{1+u_n} - \Phi = \frac{(\sqrt{1+u_n}-\Phi)(\sqrt{1+u_n}+\Phi)}{\sqrt{1+u_n}+\Phi} = \frac{\sqrt{1+u_n}^2 - \Phi^2}{\sqrt{1+u_n}+\Phi} = \frac{1+u_n-(\Phi+1)}{\sqrt{1+u_n}+\Phi} = \frac{u_n-\Phi}{\sqrt{1+u_n}+\Phi}$
   $= \frac{1}{\sqrt{1+u_n}+\Phi}(u_n - \Phi)$ donc $|u_{n+1} - \Phi| = \left|\frac{1}{\sqrt{1+u_n}+\Phi}\right| |u_n - \Phi|$
   il nous faut encadrer $\left|\sqrt{1+u_n} + \Phi\right| = \sqrt{1+u_n} + \Phi = \mathrm{u}_{n+1} + \Phi$
   On a montré que $\forall n \ge 1, 1 \le u_n \le \Phi$ donc $2 \le \mathrm{u}_{n+1} + \Phi \le 2\Phi$ donc $\frac{1}{2\Phi} \le \frac{1}{\sqrt{1+u_n}+\Phi} \le \frac{1}{2}$ donc :
   $\left|\frac{1}{\sqrt{1+u_n}+\Phi}\right| \le \frac{1}{2}$ donc $\left|\frac{1}{\sqrt{1+u_n}+\Phi}\right| |u_n - \Phi| \le \frac{1}{2}|u_n - \Phi|$ donc $|u_{n+1} - \Phi| \le \frac{1}{2}|u_n - \Phi|$
5) Initialisation : si n=1 alors $|u_1 - \Phi| = |1 - \Phi| = |\Phi - 1| = \left|\frac{1}{\Phi}\right| = \frac{1}{\Phi}$ or $1 < \Phi < 2$ donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{\Phi} < 1$
   Donc $|u_1 - \Phi| < 1$ donc $|u_1 - \Phi| \le 1$ donc $|u_1 - \Phi| \le \frac{1}{2^{1-1}}$
   Hérédité : soit $k \ge 1$ tel que $|u_k - \Phi| \le \frac{1}{2^{k-1}}$ alors $|u_{k+1} - \Phi| \le \frac{1}{2}|u_k - \Phi| \le \frac{1}{2}\frac{1}{2^{k-1}}$
   Donc $|u_{k+1} - \Phi| \le \frac{1}{2^k}$ d'où l'hérédité
   Conclusion : $\forall n \ge 1, |u_n - \Phi| \le \frac{1}{2^{n-1}}$
6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \Phi| = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \Phi$
   $\sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \Phi$
7) Avoir une approximation à ε près veut dire que $|u_n - \Phi| \le \varepsilon$ donc on cherche n tel que $\frac{1}{2^{n-1}} \le \varepsilon$. Cette question est gérable avec ln mais cette fonction n'est vue que longtemps après ce chapitre sur le livre comme sur le cours. On peut tout de même s'en sortir avec une ROC : on sait que si $a > 0$ alors pour tout entier n on aura : $(1+a)^n \ge 1 + na$ donc en prenant $a = 1$ on a : $2^n \ge 1 + n$ et donc $\frac{1}{2^n} \le \frac{1}{1+n}$ et donc sin $n \ge 1$ on aura $\frac{1}{2^{n-1}} \le \frac{1}{n}$ on cherche donc un n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ donc $\frac{1}{\varepsilon} < n$, il nous suffira de prendre donc les n après $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$
8) **Variables**
   N un nombre entier
   U un réel
   ε un réel positif

Début
Saisir ε
N prend la valeur 1 (utilité discutable)
U prend la valeur 1
Pour I allant de 2 à $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$
N prend la valeur N+1 (utilité discutable)
U prend la valeur $\sqrt{U+1}$
Fin de pour
Afficher U
Afficher N
Fin

La calculatrice va calculer les termes jusqu'au 100 000 001ème et va nous donner 1,611803399
Vu le choix du choix de la valeur d'arret cette approche est d'une inefficacitée hallucinante
Avec l'utilisation de ln on aurait vu qu'on pouvait s'arreter au $28^{\text{ème}}$ terme.