Exercices et démonstrations sur les suites

Sommaire

Mise à jour du 4/10/2017

Exercice 57 P 35

On pose P_n: "$u_n \geq 1, u_{n+1} \geq 1$"

Initialisation :

Pour $n = 0$ $u_n = u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_1 = \frac{3}{2} \geq 1$ donc P_0 vraie

Hérédité :

Soit k un entier naturel tel que P_k soit vrai, montrons que P_{k+1} est vrai

$u_{k+2} = \frac{1}{2}u_{k+1} + \frac{2}{3}u_k$ or $u_k \geq 1$, $u_{k+1} \geq 1$ (HR) donc $u_{k+2} \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ or $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1$ donc $u_{k+2} > 1$

Or $u_{k+1} \geq 1$ (HR) donc P_{k+1} vraie , d'où l'hérédité.

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$ Ainsi : la suite est minorée par 1.

Exercice 97P39

Soit $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-\frac{u_n+4}{u_n+4}}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+\frac{3(u_n+4)}{u_n+4}} = \frac{\frac{u_n-1}{u_n+4}}{\frac{5u_n+15}{u_n+4}} = \frac{u_n-1}{5u_n+15} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n-1}{u_n+3} = \frac{1}{5} \times v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+3} = \frac{0-1}{0+3} = -\frac{1}{3}$

2) ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Or $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ donc $v_n(u_n + 3) = u_n - 1$ donc $v_n u_n + v_n 3 = u_n - 1$ ainsi $v_n 3 + 1 = u_n - v_n u_n$ et $v_n 3 + 1 = u_n(1 - v_n)$ donc $\frac{v_n 3+1}{1-v_n} = u_n$ c'est-à-dire : $u_n = \frac{1+3v_n}{1-v_n}$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1+3\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

3) comme $0 < \frac{1}{5} < 1$ on a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et donc par produit $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

Et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

De plus $\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 1$ donc par quotient $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 1$ ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 99P40

1.

$\begin{cases} v_0 = -\frac{3}{2} \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1 \end{cases}$ est la définition par récurrence classique d'une suite arithmético géométrique. (Je connais le premier terme et une formule pour passer d'un terme au suivant donc je pourrais prouver par récurrence l'existence de tous les termes.)

$w_n = 2v_n + 6$ me permet de déduire les termes de (w_n) en fonction des termes correspondants de v_n qui sont connu grâce à l'utilisation de la définition par récurrence

2.

$w_{n+1} = 2v_{n+1} + 6 = 2\left(\frac{2}{3}v_n - 1\right) + 6 = \frac{4}{3}v_n - 2 + 6$ or comme $w_n = 2v_n + 6$ on aura : $\frac{w_n}{2} - 3 = v_n$ et donc : $w_{n+1} = \frac{4}{3}\left(\frac{w_n}{2} - 3\right) - 2 + 6 = \frac{2}{3}w_n - 4 + 4 = \frac{2}{3}w_n$ donc la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = 2v_0 + 6 = 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = 3$

3.

On peut donc en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Comme $\frac{w_n}{2} - 3 = v_n$ on aura $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2} - 3 = \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$

Comme $0 \leq \frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et donc par différence $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 = -3$

4. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} w_k = w_0\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} - 1}\right) = 3\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\frac{-1}{3}}\right) = -9\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)$

Comme $0 \leq \frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = -1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} = -9\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = 9$

Exercice 100P40

1.a.

Regardons les premiers termes de la suite (u_n).

$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = -1$ $\quad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 = -\frac{1}{2}$ $\quad u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1 = \frac{3}{4}$

On pose P_n: " $u_n \geq 0$"

Initialisation :

Pour $n = 3$, $u_n = u_3 = \frac{3}{4}$ or $\frac{3}{4} \geq 0$ donc P_3 vraie

Hérédité

Soit $k \geq 3$ tel que P_k soit vrai, montrons que P_{k+1} est vraie

$u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + k - 1$ or P_k vraie

Donc $u_{k+1} \geq \frac{1}{2}0 + k - 1$ donc $u_{k+1} \geq k - 1$ or $k \geq 3$

Donc $u_{k+1} \geq 3 - 1 \geq 0$ et donc $u_{k+1} \geq 0$ d'où l'hérédité.

Version alternative

P_k vraie donc $u_k \geq 0$ et donc $\frac{1}{2}u_k \geq 0$ et donc $\frac{1}{2}u_k + k - 1 \geq k - 1$ donc $u_{k+1} \geq k - 1$

Comme $k \geq 3$ on aura $k - 1 \geq 3 - 1$ donc $k - 1 \geq 0$ ainsi $u_{k+1} \geq 0$ d'où l'hérédité.

Conclusion

$\forall n \geq 3, u_n \geq 0$

b.

sur TI ça donne :

```
Prompt M
0 →N
1→U
While U <M
N+1→N
1/2*U+N-1→U
End
Disp N
```

c.

vu que quel que soit le seuil M propose il trouve un rang pour lequel $u_n \geq M$ on peut avoir l'impression que la suite diverge vers $+\infty$

d.

Soit un entier $n \geq 4$ alors $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + (n-1) - 1$ ici je n'ai fait qu'adapter la formule du début d'exercice, je peux me permettre de faire ça vu qu'avec $n \geq 4$ je ne vais pas avoir d'indice pour u_{n-1} qui soit négatif.

Comme $n \geq 4, n - 1 \geq 3$ et donc $u_{n-1} \geq 0$ d'après le 1.a.

Ainsi $\frac{1}{2}u_{n-1} \geq 0$ et $\frac{1}{2}u_{n-1} + (n-1) - 1 \quad \geq 0 + (n-1) - 1$ et donc $u_n \geq n - 2$

Ainsi $\forall n \geq 4, u_n \geq n - 2$

e.

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 2 = +\infty$ et que $\forall n \geq 4, u_n \geq n - 2$ on aura grâce au théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2)a) $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n - 8 + 24 = 2u_n - 4n + 12$

$= \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \frac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier rang $v_0 = 4u_0 - 8 \times 0 + 24 = 4 + 24 = 28$ et donc :

$v_n = 28\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{28}{2^n}$, elle est donc décroissante de limite 0.

b) $v_n = 4u_n - 8n + 24$ donc $v_n + 8n - 24 = 4u_n$ et donc $u_n = \frac{v_n + 8n - 24}{4} = \frac{\frac{28}{2^n} + 8n - 24}{4} = \frac{7}{2^n} + 2n - 6$

c) si on pose $x_n = \frac{7}{2^n}$ et $y_n = 2n - 6$ alors ces deux suites sont respectivement géométriques et arithmétiques de raison ½ et 2 et de premiers termes 7 et -6 de plus on a $u_n = x_n + y_n$.

$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} x_k + \sum_{k=0}^{k=n} y_k = \frac{x_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} + \frac{(n+1)(y_0 + y_n)}{2} = \frac{7\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{(n+1)(-6 + 2n - 6)}{2}$

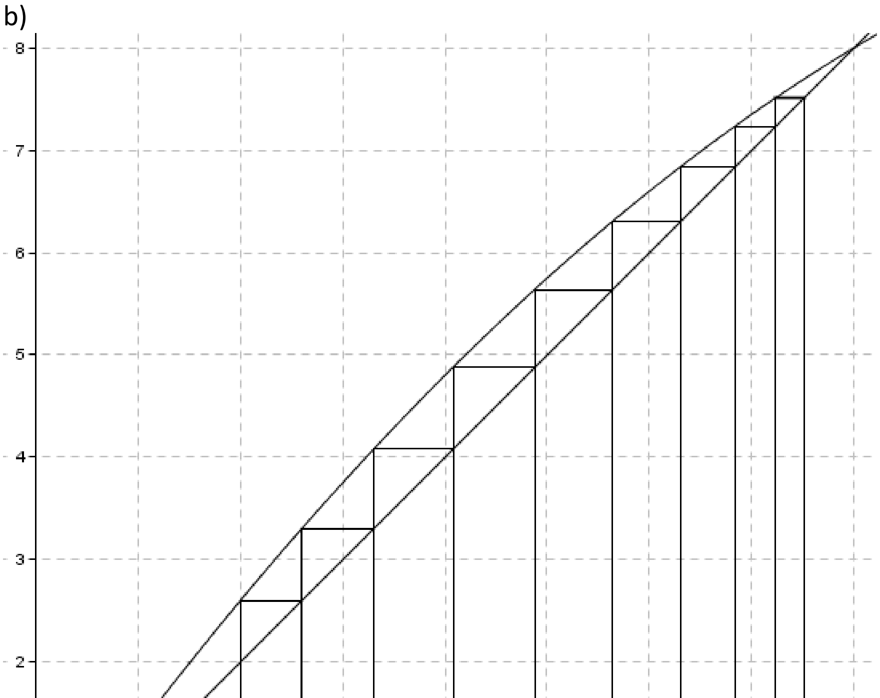
$= 14\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - (n+1)(n-6)$

EX 108P42

1) $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}\right) + \frac{1}{(n+1)^3} = u_n + \frac{1}{(n+1)^3}$ donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3}$ or $\frac{1}{(n+1)^3} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
2) On pose $\mathcal{P}_n$: " $u_n \leq 2 - 1/n$"
   Initialisation : Pour $n = 1$ on aura : $u_n = u_1 = 1$ et $2 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{1} = 1$ donc $\mathcal{P}_1$ vraie
   Hérédité : Soit $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vrai, montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi.
   $u_k \leq 2 - \frac{1}{k}$ (HR) $\Leftrightarrow u_k + \frac{1}{(k+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3} \Leftrightarrow u_{k+1} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3}$
   Je n'ai pas le membre de droit que je veux avoir donc, je dois trouver le moyen de montrer que celui que j'ai est bien inférieur à celui que je suis censé avoir. Autrement dit je dois montrer que $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$ pour prouver cette inégalité (et non inéquation) je dois étudier le signe de $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3} - \left(2 - \frac{1}{k+1}\right)$ et prouver que c'est bien négatif ou nul.
   $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3} - \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^3} = \frac{-(k+1)^3}{k(k+1)^3} + \frac{k(k+1)^2}{k(k+1)^3} + \frac{k}{k(k+1)^3}$
   $= \frac{-(k+1)^3 + k(k+1)^2 + k}{k(k+1)^3} = \frac{-(k^3+3k^2+3k+1)+k^3+2k^2+k+k}{k(k+1)^3} = \frac{-k^2-k-1}{k(k+1)^3}$
   Le numérateur étant toujours négatif sur $\mathbb{N}$ (ça se prouve avec la recherche du discriminant et une interprétation pertinente de celui-ci) et le dénominateur étant toujours positif on aura :
   $\frac{-k^2-k-1}{k(k+1)^3} < 0$ donc $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3} - \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) < 0$ donc $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3} < \left(2 - \frac{1}{k+1}\right)$
   Donc $u_k + \frac{1}{(k+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3} < 2 - \frac{1}{k+1}$ donc $u_k + \frac{1}{(k+1)^3} < 2 - \frac{1}{k+1}$ donc :
   $u_k + \frac{1}{(k+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$ d'où l'hérédité
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2 - 1/n$
3) On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ donc la suite est croissante et majorée elle converge donc vers une limite $l < 2$
4) On n'a pas eut le temps de le traiter en détail en classe, mais voici des pistes :
   Bon là vu comme la question est posée c'est normal de buguer cf : http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?18,775368
   Donc comme j'ai pu le proposer au groupe du lundi
   La première chose à faire est de trouver la limite, le problème c'est que le nombre continue sur des km et des km, sauf que votre calculatrice elle ne contient pas autant de décimale. Donc l'idée c'est dans un premier temps de calculer la meilleure approximation possible, puis dans un deuxième temps de faire une boucle avec du tant que pour qu'elle s'arrète au moment ou l'a obtenu une valeur approchée à ε près, mais franchement c'est naze.
   Programme 1
   ```
   Mettre 0 dans la variable L
   Pour I allant de 1 à 100 000 000
       L+1/I^3 sera stockée dans L
   Fin du pour
   Afficher L
   ```
   On a donc stocké dans L la meilleure approximation de la limite et on a perdu une heure de calcul et vidé les piles
   Programme 2
   ```
   Demander l'écart E
   Stocker 0 dans  U
   Stocker 0 dans N
   Tant que L-U>E
       N+1 est stocké dans N
       U+1/N^3 est stocké dans  U
   Fin du tant que
   Afficher « approximation », U, « pour le rang » N
   ```

Autre piste :
On peut essayer d'obtenir une expression du reste qui permet d'aller de u_n jsuqu'à sa limite
Ou au moins un majorant de cette différence
$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{m^3}$ et là on n'a pas d'idée
Il faut absolument que le prof demande de démontre que
$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k(k^2-1)}$ puis que $\frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1})$ puis que
$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right)$
Etudier la limite de cette somme quand m tends vers plus l'infini : on obtient
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}$ on aura donc $\lim_{k \to +\infty} u_k - u_n \leq \frac{1}{2n(n+1)} \leq \frac{1}{2(n+1)^2}$
Donc si on veut que l'écart soit plus petit que ε on cherchera à avoir $\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \varepsilon$ autrement dit $n = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} - 1$
On pourra donc faire l'algorithme suivant :
Demander un écart strictement positif E
Mettre 0 dans la variable L
Stocker (1/racine de 2E -1) + 1 dans N
Pour I allant de 1 à partie entière de
L+1/I^3 sera stockée dans L
Fin du pour
Afficher « le rang »,N, « l'approximation »,L

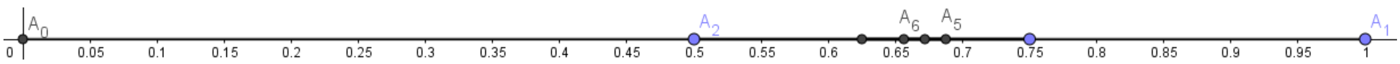
Exercice 110P43

1a) f est un polynome du second degré dont le coefficient du monome de second degré est négatif donc jusqu'à $-\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}4}{2\times(-0{,}05)} = 14$ elle sera croissante donc la fonction est croissante sur $[0;8]$
b)


c) La suite semble croissante et convergente vers une limite 8

2)
On pose $\mathcal{P}_n$: " $2 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$"

Initialisation : Pour $n = 0$ on aura : $v_n = v_0 = 2$ $v_{n+1} = v_1 = 2{,}6$ donc $\mathcal{P}_0$ vraie
Hérédité : Soit $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vrai, montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi.
$2 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq 8$ (HR) donc $f(2) \leq f(v_k) \leq f(v_{k+1}) \leq f(8)$ car f est croissante sur [0 ;8]
Donc $2 \leq 2{,}6 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 8$
Donc $2 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 8$
d'où l'hérédité
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$
3)
Donc non seulement la suite est croissante mais en plus elle est majorée par 8 et donc elle admet une limite finie
4)
$-0{,}05(x-20)(x-8) = -0{,}05(x^2 - 28x + 160) = -0{,}05x^2 + 1{,}4x - 8 = f(x) - 8$ CQFD
a) si on remplace x par v_n dans l'expression de la question précédente on a :
$f(v_n) - 8 = -0{,}05(v_n - 20)(v_n - 8)$ donc $v_{n+1} - 8 = -0{,}05(v_n - 20)(v_n - 8)$
Donc $8 - v_{n+1} = -0{,}05(v_n - 20)(8 - v_n)$ pour passer à l'inégalité demandée il me faut encadrer :
$-0{,}05(v_n - 20)$
$2 \leq v_n \leq 8$ donc $-18 \leq v_n - 20 \leq -12$ donc $0{,}9 \geq -0{,}05(v_n - 20) \geq 0{,}6$ donc :
$-0{,}05(v_n - 20) \leq 0{,}9$ donc $-0{,}05(v_n - 20)(v_n - 8) \leq 0{,}9(v_n - 8)$ or $v_{n+1} - 8 = -0{,}05(v_n - 20)(v_n - 8)$
donc : $v_{n+1} - 8 \leq 0{,}9(v_n - 8)$
b)
On pose $\mathcal{P}_n$: " $8 - v_n \leq 6 \times 0{,}9^n$ "
Initialisation : Pour $n = 0$ on aura : $8 - v_n = 8 - v_0 = 6$ et $6 \times 0{,}9^n = 6 \times 0{,}9^0 = 6$ donc $\mathcal{P}_0$ vraie
Hérédité : Soit $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vrai, montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi.
$8 - v_k \leq 6 \times 0{,}9^k$ (HR)donc$0{,}9(8 - v_k) \leq 6 \times 0{,}9^{k+1}$
or on sait d'après la question précédente que $v_{k+1} - 8 \leq 0{,}9(v_k - 8)$
donc $v_{k+1} - 8 \leq 6 \times 0{,}9^{k+1}$
d'où l'hérédité
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 8 - v_n \leq 6 \times 0{,}9^n$
c)
on a : $0 \leq 8 - v_n \leq 6 \times 0{,}9^n$ car la suite est majorée par 8
$\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ et comme $0{,}9 \in]-1;1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 6 \times 0{,}9^n = 0$ donc par encadrement $8 - v_n$ converge vers 0 et donc v_n converge vers 8.

102 P41
1.a.


b.
l'abscisse du milieu d'un segment est la moyenne des abscisses des extrémités de ce segment donc :
$a_2 = \frac{a_1 + a_0}{2} = 0{,}5$ $a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} = 0{,}75$ $a_5 = \frac{0{,}5 + 0{,}75}{2} = 0{,}625$
$a_6 = \frac{0{,}75 + 0{,}625}{2} = 0{,}6875$
c.
a_{n+2} est l'abscisse du point A_{n+2}, autrement dit le milieu du segment $[A_{n+1}A_n]$, segment dont les extrémitées A_{n+1} et A_n on pour abscisses respectives a_{n+1} et a_n or l'abscisse du milieu d'un segment est la moyenne des abscisses des extrémités de ce segment donc : $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$
2.
soit $\mathcal{P}_n$: "$a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + 1$"
Initialisation :
Pour $n = 0$
$a_{n+1} = a_{0+1} = 1$ et $-\frac{1}{2} a_n + 1 = -\frac{1}{2} a_0 + 1 = 1$ donc pour $n = 0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Hérédité
Hérédité : Soit $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie (i.e. $a_{k+1} = -\frac{1}{2} a_k + 1$), montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi, c'est-à-dire que :
$a_{k+2} = -\frac{1}{2} a_{k+1} + 1$.

$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}+a_k}{2}$ d'après 1.c. or d'après l'hypothèse de récurrence on a : $a_{k+1} = -\frac{1}{2}\ a_k + 1$ autrement dit on a : $-2(a_{k+1} - 1) = \ a_k$ et donc :
$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}-2(a_{k+1}-1)}{2} = \frac{a_{k+1}-2a_{k+1}+2}{2} = \frac{-a_{k+1}+2}{2} = -\frac{1}{2}a_{k+1} + 1$ d'où l'hérédité
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ vraie
3.
$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a_n - \frac{2}{3}$ donc on aura aussi quel que soit n entier naturel : (1) $v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3}$ et (2) $v_n + \frac{2}{3} = a_n$
Soit n un entier naturel, alors on a :

$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\ a_n + 1\right) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\ a_n + \frac{1}{3}$ et donc d'après (2)
$v_{n+1} = -\frac{1}{2}\ \left(\ v_n + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\ v_n - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}v_n$ la suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

4.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et donc d'après (2) on aura : $a_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$

118P46
Partie A
1.
u_0 pouvant prendre n'importe quelle valeur on ne peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-1; 1]$
Par contre si on se débarrasse de ce cas-là et qu'on ne considère que les termes de rang supérieurs ou égaux à 1, on pourrait montrer avec une récurrence que chaque terme existe et qu'il est dans l'intervalle $[-1; 1]$
(La fonction sinus a ses valeurs dans $[-1; 1]$, donc la fonction f aussi) détail : question B2a
2.
Supposons que u_0 est un entier pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $u_0 = 2p$
On a alors $u_1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2}2p\right) = -\sin(\pi p) = 0$ et avec une récurrence simple on peut montrer que tous les termes qui vont suivre seront nuls.
3.
Supposons que u_0 est un entier pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $u_0 = 2p + 1$
$\mathcal{P}_n : u_n \in \{-1; 1\}$
Initialisation :
Prenons $n = 1$
On a alors $u_n = u_1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2}(2p + 1)\right) = -\sin\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ ou -1 suivant la valeur de p
(Explication : Si p est pairsin $\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et donc $-\sin\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = -1$
Si p est impairsin $\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$ et donc $-\sin\left(\pi p + \frac{\pi}{2}\right) = 1$)
Hérédité :
Soit un entier strictement positif k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie (i.e. $u_k \in \{-1; 1\}$), montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi, c'est-à-dire que : $u_{k+1} \in \{-1; 1\}$)
Cas 1 $u_k = 1$ $\quad u_{k+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_k\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
Cas 1 $u_k = -1$ $\quad u_{k+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_k\right) = -\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = +1$
Dans les deux cas $u_{k+1} \in \{-1; 1\}$ d'où l'hérédité
Conclusion :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \{-1; 1\}$

Partie B
1.
On admettra que la fonction f est décroissante sur $[-1; 1]$
Sinon il nous faut connaitre la formule de dérivée $\sin(ax + b) \to a\cos(ax + b)$ et dans ce cas :
$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
Quand $x \in [-1; 1], \frac{\pi}{2}x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \in [0; 1]$ et donc $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $[-1; 1]$.
De plus $f(-1) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f(1) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
2.a.

$\mathcal{P}_n: u_n \in [-1;1]$
Initialisation :
Prenons $n = 1$
On a alors $u_n = u_1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_0\right)$ or la fonction sinus a ses valeurs comprises entre -1 et 1 et donc l'opposé de ses valeurs sera aussi entre -1 et 1 donc $u_1 \in [-1;1]$.
Hérédité :
Soit un entier strictement positif k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie (i.e. $u_k \in [-1;1]$), montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi, c'est-à-dire que : $u_{k+1} \in [-1;1]$)
$u_{k+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_k\right)$ or la fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ et a ses valeurs dans $[-1;1]$ et la fonction $-\sin(x)$ aussi et donc $-\sin\left(\frac{\pi}{2}u_k\right) \in [-1;1]$ et donc $u_{k+1} \in [-1;1]$ d'où l'hérédité
Conclusion :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [-1;1]$
b.
ainsi la suite est majorée par $\max(u_0, 1)$ et minorée par $\min(u_0, -1)$ elle est donc bornée
c.
on sait que si une suite est croissante et marjorée elle est convergente, on sait aussi que si une suite est décroissante et minorée elle est convergente, or notre suite est bornée (majorée et minorée) donc il suffit qu'elle soit croissante ou qu'elle soit décroissante, autrement dit il suffit qu'elle soit monotone pour que l'on puisse déduire qu'elle est convergente. La réponse est donc « oui ».
3. a
Si $x \in]-1;0[$ autrement dit $-1 < x < 0$ alors f étant strictement décroissante on aura $f(-1) > f(x) > f(0)$ c'est-à-dire $0 < f(x) < 1$ donc $f(x) \in]0;1[$
De même si $x \in]0;-1[$ autrement dit $0 < x < 1$ alors f étant strictement décroissante on aura $f(0) > f(x) > f(1)$ c'est-à-dire $-1 < f(x) < 0$ donc $f(x) \in]-1;0[$
et donc si $x \in]-1;0[\cup]0;1[$ alors $f(x) \in]-1;0[\cup]0;1[$
b.
On suppose que u_0 n'est pas entier
$\mathcal{P}_n: u_n pas\ entier$
Initialisation :
Prenons $n = 0$, or on sait que (on l'a supposé) u_0 n'est pas entier donc u_n pas entier, ainsi pour $n = 0$, $\mathcal{P}_n$ vraie.
Hérédité :
Soit un entier strictement positif k tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie (i.e$u_k pas\ entier.$), montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi, c'est-à-dire que : $u_{k+1} pas\ entier$)
D'après 2.a. u_k est dans $[-1;1]$ or $u_k pas\ entier$ donc -1,0 et 1 sont des valeurs à exclures et donc on a : $u_k \in]-1;0[\cup]0;1[$
Donc d'après la question 3.a. on a : $u_{k+1} = f(u_k) \in]-1;0[\cup]0;1[$ et donc u_{k+1} n'est pas un entier d'où l'hérédité.
Conclusion :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n\ pas\ entier$
4.a.
Voir question 3.a.
b.
Pour prouver que la suite n'est pas monotone il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire deux termes consécutifs qui entre lesquels la variation va dans le sens contraire.
Ici on se contentera de prouver que si l'on prend trois termes consécutifs on varie dans un sens entre les deux premiers et dans l'autre entre les deux seconds.
On prend une suite avec u_0 pas entier, et on considère un rang quelconque différend de 0
soit $n \geq 1$, alors on sait que $u_n \in]-1;0[\cup]0;1[$ (« pas entier » + « entre -1 et 1 »)
si $u_n \in]-1;0[$ alors et $u_{n+1} \in]0;1[$ donc $u_{n+2} \in]-1;0[$ elle monte puis elle descend, elle n'est donc pas monotone à partir de n
si $u_n \in]0;1[$ alors et $u_{n+1} \in]-1;0[$ donc $u_{n+2} \in]0;1[$elle descend puis elle monte, elle n'est donc pas monotone à partir de n

maintenant si on tiens absolument à regarder à partir de $n = 0$, c'est dur de prévoir les variations entre u_0 et u_1 par contre on sait que $u_{n+1} = u_1 \in]-1; 0[\cup]0; 1[$ (« pas entier » + « entre -1 et 1 ») et de là on peut reprendre le raisonnement précédent.

Conclusion de l'exercice (non demandée)
Si u_0 n'est pas un entier alors la suite n'étant pas monotone, elle ne peut être convergente (d'après le B2c)
Si u_0 est un entier pair, elle est constante (0) après le terme de rang 1 et donc converge vers cette valeur 0
Si u_0 est un entier impair, on alterne entre -1 et 1 donc pas de convergence

Exercice 122P48
1.
Soit $n \in \mathbb{N}$
$u_n \geq 0$ et donc $u_n + 1 > 0$ et donc par quotient $\frac{u_n}{u_n+1} \geq 0$ donc $v_n \geq 0$
$u_n \leq u_n + 1$ donc en divisant les deux membres par le réel positif $u_n + 1$ on aura : $\frac{u_n}{u_n+1} \leq 1$ et donc $v_n \leq 1$
On a donc $0 \leq v_n \leq 1$ ceci étant vrai pour un n quelconque ça sera vrai pour tout entier naturel n
2.
Supposons que u_n ait une limite finie, alors il existe un réel l tel que
$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et donc par somme $\lim_{n\to+\infty} u_n + 1 = l + 1$ et donc par quotient $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_n+1} = \frac{l}{l+1}$
On a donc (v_n) qui converge vers un réel fini : $\frac{l}{l+1}$
On a donc « u_n a une limite finie »=> « v_n a une limite finie »
3.
Supposons que (u_n) soit croissante
Soit $n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+1} - \frac{u_n}{u_n+1} = \frac{u_{n+1}(u_n+1)-u_n(u_{n+1}+1)}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} = \frac{u_{n+1}u_n+u_{n+1}-u_nu_{n+1}-u_n}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} = \frac{u_{n+1}-u_n}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}$
Or comme (u_n) est croissante on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc vu le dénominateur strictement positif on a :
$\frac{u_{n+1}-u_n}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} \geq 0$ et donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et donc $v_{n+1} \geq v_n$
Ceci étant vrai pour un entier naturel n quelconque on aura $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \geq v_n$ et donc la suite est croissante
4.
Version courte : Non ! car on a un super contre-exemple :
Si on prends $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par exemple en prenant $u_n = n$) et bien $\lim_{n\to+\infty} v_n$ =1 donc la suite (v_n) peut avoir une limite finie sans que (u_n) soit dans ce cas là.
Pour y penser : prendre une suite (u_n) qui ne tends pas vers une limite finie …. Vu qu'elle est positive , le plus simple c'est de tenter qu'elle tende vers +∞

Démonstrations de propriétés du cours :

Formules de première
Les suites (u_n) et (v_n) respectivement géométrique et arithmétique de raison q et r peuvent s'écrire en fonction de n de la manière suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$ et $v_n = v_0 + nr$.

Preuve par récurrence :
1)
Soit P_n: "$u_n = u_0 q^n$"
Initialisation :
On pose $n = 0$
$u_n = u_0$ et $u_0 \times q^n = u_0 \times q^0 = u_0$ donc pour $n = 0, P_n$ est vraie
Hérédité :
Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que P_k soit vraie , c'est-à-dire tel que $u_k = u_0 q^k$, montrons qu'alors P_{k+1} est vraie , c'est-à-dire que $u_{k+1} = u_0 q^{k+1}$.
$u_{k+1} \quad = u_k q$ par définition
$\qquad = (u_0 q^k) q$ (HR)
$\qquad = u_0 q^{k+1}$ d'où l'hérédité
Conclusion :
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$
2)
Soit P_n: "$v_n = u_0 + nr$"
Initialisation :
On pose $n = 0$
$v_n = u_0$ et $v_0 + nr = v_0 + 0r = v_0$ donc pour $n = 0, P_n$ est vraie
Hérédité :
Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que P_k soit vraie , c'est-à-dire tel que $v_k = v_0 + kr$, montrons qu'alors P_{k+1} est vraie , c'est-à-dire que $v_{k+1} = v_0 + (k+1)r$.
$v_{k+1} \quad = v_k + r$ par définition
$\qquad = (v_0 + kr) + r$ (HR)
$\qquad = v_0 + (k+1)r$ d'où l'hérédité
Conclusion :
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_0 + nr$

Opérations sur les limites de suite
Propriétés :

1) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ => $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$

2) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L' \end{cases}$ => $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = LL'$

1)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de limites $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ montrons que la limite de la somme de ces deux suites est aussi $+\infty$
Soit$A \in \mathbb{R}$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > \frac{A}{2}$ (on exploite la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ avec un seuil A' astucieusement fixé à $\frac{A}{2}$)
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, v_n > \frac{A}{2}$ (même principe)
Je pose $n_2 = \max(n_0, n_1)$
$\forall n \geq n_2, n \geq n_0$ donc $u_n > \frac{A}{2}$ et $n \geq n_1$ donc $v_n > \frac{A}{2}$ et donc on aura (par somme) $u_n + v_n > \frac{A}{2} + \frac{A}{2}$
Ainsi on vient de prouver que pour un A quelconque on a l'existence d'un rang à partir duquel la somme des deux suites est supérieure strictement à A.
Ceci étant vrai pour un A quelconque, ça sera vrai pour tous les A et donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$

2)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de limites respectives L et L' quand n tend vers $+\infty$ montrons que la limite du produit de ces deux suites est LL' autrement dit montrons que $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, LL' - \varepsilon < u_n v_n < LL' + \varepsilon$
Reflexion :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ donc $\forall\varepsilon_u > 0, \exists n_u \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_u, L - \varepsilon_u < u_n < L + \varepsilon_u$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$ donc $\forall\varepsilon_v > 0, \exists n_v \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_v, L' - \varepsilon_v < v_n < L' + \varepsilon_v$
Une fois ε_u et ε_v fixés du moment qu'on est au-delà de n_u et n_v on aura les deux encadrements : $L - \varepsilon_u < u_n < L + \varepsilon_u$ et $L' - \varepsilon_v < v_n < L' + \varepsilon_v$ simultanément
Vu que l'on cherche à encadrer $u_n v_n$ il va falloir les combiner astucieusement. Prenons le premier :
$L - \varepsilon_u < u_n < L + \varepsilon_u$ multiplions tout par v_n
$(L - \varepsilon_u)v_n < u_n v_n < (L + \varepsilon_u)v_n$ or on sait que $L' - \varepsilon_v < v_n < L' + \varepsilon_v$
Donc $(L - \varepsilon_u)(L' + \varepsilon_v) < (L - \varepsilon_u)v_n < u_n v_n < (L + \varepsilon_u)v_n < (L + \varepsilon_u)(L' + \varepsilon_v)$
Donc $LL' - L\varepsilon_v - L'\varepsilon_u + \varepsilon_v\varepsilon_u < u_n v_n < LL' + L\varepsilon_v + L'\varepsilon_u + \varepsilon_v\varepsilon_u$
Mais là on a fait une grosse erreur voir deux :
Quand on a écrit $(L - \varepsilon_u)v_n < u_n v_n < (L + \varepsilon_u)v_n$ sans le dire on a supposé que l'on avait multiplié par v_n un nombre positif tous les membres (sinon ça changerait le sens de l'encadrement)
Même problème décuplé quand a utilisé $(L' + \varepsilon_v) < v_n$ pour écrire $(L - \varepsilon_u)(L' + \varepsilon_v) < (L - \varepsilon_u)v_n$
Pour que ça fonctionne il faut la multiplication qui a été faite (par $(L - \varepsilon_u)$) soit par un nombre positif (sinon ça change l'ordre)
De la même manière le passage de$v_n < (L' + \varepsilon_v)$ à $(L + \varepsilon_u)v_n < (L + \varepsilon_u)(L' + \varepsilon_v)$ ne fonctionne que si on a : $(L + \varepsilon_u) > 0$
Ok, pour résumer notre début de piste n'est viable que si on a réuni les conditions suivantes :
$v_n > 0$, $(L - \varepsilon_u) > 0$et $(L + \varepsilon_u) > 0$ on pleure un bon coup et on s'y remet !
Le patch : **si on a L et L' toutes deux strictement positives**, on a le droit de prendre pour les deux suites un même rayon de taille inférieure à la moitié de la distance entre L et 0 et aussi à la moitié de la distance entre L' et 0, par exemple je peux prendre ε_0 un rayon positif plus petit que $\min\left(\frac{L}{2}; \frac{L'}{2}\right)$
Et dans ce cas-là il existera un rang n_0 à partir duquel $L' - \varepsilon_v < v_n < L' + \varepsilon_v$ c'est-à-dire $L' - \varepsilon_0 < v_n < L' + \varepsilon_0$ et donc $0 < v_n < 0$ (asseyez-vous, et faite un croquis si ça n'est pas évident pour vous, ou jouez avec la notion de minimum)
$(L - \varepsilon_u) = (L - \varepsilon_0) \geq L - \frac{L}{2}$ or $L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$ et comme on a pris $L > 0$ on a bien $(L - \varepsilon_u) > 0$
$(L + \varepsilon_u) > 0$ ça c'est trivial on ajoute deux nombre strictement positifs.
Ok maintenant qu'on a mis ce problème à plat revenons à nos moutons :
Comment passer de $LL' - L\varepsilon_v - L'\varepsilon_u + \varepsilon_v\varepsilon_u < u_n v_n < LL' + L\varepsilon_v + L'\varepsilon_u + \varepsilon_v\varepsilon_u$ à $LL' - \varepsilon < u_n v_n < LL' + \varepsilon$
Et bien déjà vu le correctif la première expression peut s'écrire :
$LL' - L\varepsilon_0 - L'\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 < u_n v_n < LL' + L\varepsilon_0 + L'\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2$
Le top pour nous ça serait de démontrer que $LL' - \varepsilon < LL' - L\varepsilon_0 - L'\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2$
Autrement dit que $L\varepsilon_0 + L'\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2 < \varepsilon$
Il faudra aussi établir que $LL' + L\varepsilon_0 + L'\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 < LL' + \varepsilon$ c'est-à-dire : $L\varepsilon_0 + L'\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 < \varepsilon$
En fait si j'établis la seconde inégalité j'ai automatiquement la première
Pour régler ça je vais me débrouiller pour que chaque élément $L\varepsilon_0, L'\varepsilon_0$ et ε_0^2 soit plus petit que $\frac{\varepsilon}{4}$ comme ça leur somme sera bien plus petite que ε
On veut donc avoir $L\varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{4}, L'\varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et $\varepsilon_0^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$
On veut donc avoir $\varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{4L}\,\varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{4L'}$ et $\varepsilon_0 \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}$ (j'ai pu faire ces divisions car L et L' sont strictement positifs et pour la racine j'ai utilisé le fait que l'on prenait des epsilons positifs.)
Ok donc je vais poser $\varepsilon_1 = \min\left(\frac{L}{2}, \frac{L'}{2}, \frac{\varepsilon}{4L}, \frac{\varepsilon}{4L'}\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}\right)$ et toutes les inégalités attendues seront vraies

La démonstration au propre (cas où les deux limites Let L' sont strictement positives)
Soit $\varepsilon > 0$
Je pose $\varepsilon_1 = \min\left(\frac{L}{2}, \frac{L'}{2}, \frac{\varepsilon}{4L}, \frac{\varepsilon}{4L'}\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ donc $\exists n_u \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_u, L - \varepsilon_1 < u_n < L + \varepsilon_1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$ donc $\exists n_v \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_v, L' - \varepsilon_1 < v_n < L' + \varepsilon_1$
Et si je prends $n_0 = \max(n_u, n_v)$
Prenons un $n \geq n_0$ on a donc $n \geq n_u$ et donc j'aurai : $L - \varepsilon_1 < u_n < L + \varepsilon_1$
Comme $n \geq n_0$ on a donc $n \geq n_v$ et donc $L' - \varepsilon_1 < v_n < L' + \varepsilon_1$ or $\varepsilon_1 \leq \frac{L'}{2}$ donc $\frac{L'}{2} < v_n < \frac{3L'}{2}$ et donc $0 < v_n$ et donc multiplier par v_n ne changera pas l'ordre j'ai donc $(L - \varepsilon_1)v_n < u_n v_n < (L + \varepsilon_1)v_n$
$\varepsilon_1 < \frac{L}{2}$ donc $L - \frac{L}{2} < L - \varepsilon_1$ donc $L - \varepsilon_1 > 0$ or $L' - \varepsilon_1 < v_n$ donc $(L' - \varepsilon_1)(L - \varepsilon_1) < v_n(L - \varepsilon_1)$
De plus $L + \varepsilon_1 > 0$ par somme de nombres strictement positifs or $v_n < L' + \varepsilon_1$ donc :
$v_n(L + \varepsilon_1) < (L' + \varepsilon_1)(L + \varepsilon_1)$
Ainsi $LL' - L\varepsilon_1 - L'\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 < u_n v_n < LL' + L\varepsilon_1 + L'\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2$
Et donc $LL' - L\varepsilon_1 - L'\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 < u_n v_n < LL' + L\varepsilon_1 + L'\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2$
Et donc $LL' - (L\varepsilon_1 + L'\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2) < u_n v_n < LL' + (L\varepsilon_1 + L'\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2)$
Or $\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{4L}$, $\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{4L'}$ et $\varepsilon_1 \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}$ et donc $\varepsilon_1 L \leq \frac{\varepsilon}{4}$, $\varepsilon_1 L' \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et $\varepsilon_1^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et donc $L\varepsilon_1 + L'\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$
Et donc $LL' - (L\varepsilon_1 + L'\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2) < u_n v_n < LL' + (L\varepsilon_1 + L'\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2)$ => $LL' - \varepsilon < u_n v_n < LL' + \varepsilon$
C'est valable pour un n quelconque vérifiant $n \geq n_0$ donc cet encadrement sera vrai à partir de n_0
On vient de montrer que quel que soit le rayon $\varepsilon > 0$ on aura bien un rang à partir duquel $LL' - \varepsilon < u_n v_n < LL' + \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = LL'$

On a montré ça sur un cas particulier : les deux limites sont strictement positives, pour compléter il nous faudrait traiter tous les autres cas. A chaque fois il nous faudrait garder la même structure et adapter notre approche pour régler les problèmes de signe/d'ordre qui vont émerger.

Suite de Fibonacci
On veut faire le programme donnant n'importe quel terme de la suite de Fibonacci
Avec Wikipédia vous trouvez qu'elle est définie comme suit : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

1) Commencer par calculer les premiers termes de la suite
   Proposition d'algorithme :

Demander N
Stocker 1 dans A
Stocker 2 dans B
Pour I allant de 2 à N :
    A+B stocké dans B (pour avoir la nouvelle valeur de la suite j'ajoute les deux anciennes)
    B est stocké dans A l'ancienne valeur de A ne nous intéresse pas on veut les deux dernières
Fin pour
Afficher B

2) Dire pourquoi l'algorithme ne fonctionne pas
3) Est-ce qu'en permutant les deux lignes de la boucle (ce qui nous permettrait de mettre l'ancienne valeur de B dans A et non le nouveau terme tout chaud)
4) Corriger l'algorithme en rajoutant une variable T dans laquelle on pourra stocker temporairement une valeur

Correction
1) on aura : u_2 =3, u_3 =5, u_4 =8 , u_5 =13 , u_6 =21, u_7 =34, u_8 =55, u_9 =89
2) avant la boucle A contient u_0, B contient u_1
première itération de la boucle : B prends la valeur u_2 et A ne prends hélas pas la valeur u_1, celle-ci a disparue , elle était contenue dans B mais a été effacée par u_2 , là A prend la nouvelle valeur de B c'est-à-dire u_2 ce qui fait que je pour le tour de boucle suivant je n'aurai pas u_1 pour pouvoir calculer u_3.

3) en permutant les deux lignes de la boucle je ne fais qu'empirer la situation première ligne A va prendre la valeur u_1 puis on ne pourra même plus calculer u_2 car on aura perdu u_0
4)

Demander N
Stocker 1 dans A
Stocker 2 dans B
Pour I allant de 2 à N :
    A+B stocké dans T (pour avoir la nouvelle valeur de la suite j'ajoute les deux anciennes)
    B est stocké dans A l'ancienne valeur de A ne nous intéresse pas on veut les deux dernières
    T est stocké dans B
    Fin pour
Afficher B