Devoir surveillé n°2

Exercice 1

Soit le jeu suivant : on lance un dé équilibré, si on obtient 1 on utilisera la roue A avec laquelle la probabilité de gagner est de 32%, si on fait un deux ou un trois on utilisera la roue B avec laquelle la probabilité de gagner est de 50%, sinon on utilisera la roue C avec laquelle la probabilité de gagner est de 20%.
On notera respectivement A,B,C et G les événements « utiliser la roue A », « utiliser la roue B », « utiliser la roue C » et « gagner »

1) Faire un arbre représentant la situation, que vaut $P_A(G)$?
2) Donner $P(A \cap G)$ et $P(G)$
3) Est-ce que B et G sont indépendants ?
4) Est-ce que A et G son indépendants , que peut-on en déduire concernant $\bar{A}$ et G
5) Calculer $P_G(B)$

Exercice 2

Soit $f: x \to \sqrt{2x-1}$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 5 \end{cases}$

1) Déterminer D_f
2) Donner les variations de f sur D_f
3) Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1; 6]$
4) Donner les variations de (u_n)

Exercice 3

1) Donner les primitives des fonctions suivantes

$f(x) = x^2 - 3x + 5$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $BONUS: g(x) = \frac{4}{x^2} + 7\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$ $\quad$ $h(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{x(x-2)}}$ sur $]-\infty; 0[$

2) Donner UNE primitive des fonctions suivantes

$i(x) = 30x(x^2-5)^{17}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $j(x) = \frac{21x-35}{(3x^2-10x+13)^8}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $k(x) = \frac{3\sin x}{\cos^9 x}$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

3) Donner la primitive ayant pour valeur 2 en 3 de la fonction suivante

$l(x) = (3x-2)\left(x^2 - \frac{4}{3}x + 7\right)^2$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 (R.O.C.)

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+\pi)^n \geq 1 + n\pi$

Exercice 5

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{2x+3}{(x+3)^3}$ sur $D_f =]-\infty; -3[$

1) Etudiez les variations de f sur D_f.
2) Donner les limites de f aux bornes de D_f, en déduire les asymptotes.
3) Prouver l'existence et l'unicité de la solution de $f(x) = \frac{544}{1331}$,
4) Déterminer un encadrement à deux centièmes de cette solution
5) En déduire a et b tels que $f(x) = \frac{a}{(x+3)^2} + \frac{b}{(x+3)^3}$
6) En déduire la primitive de f sur D_f qui s'annule en 2.

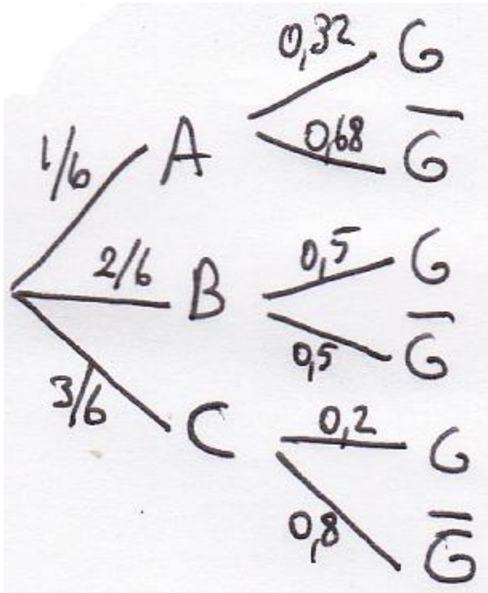
Exercice 6

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to 5^+} f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{\frac{3x-8}{x-5}}$
2) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ avec $g(x) = \sqrt{x^2+4x-5} - \sqrt{x^2-2x+3}$
3) $\lim_{x \to 0} h(x)$ avec $h(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ (BONUS $\lim_{x \to 0} z(x)$ avec $(x) = \frac{\sin x}{x}$) pensez aux dérivées et taux de variation.

Devoir surveillé n°2

Exercice 1 (12min)



Soit le jeu suivant : on lance un dé équilibré, si on obtient 1 on utilisera la roue A avec laquelle la probabilité de gagner est de 32%, si on fait un deux ou un trois on utilisera la roue B avec laquelle la probabilité de gagner est de 50%, sinon on utilisera la roue C avec laquelle la probabilité de gagner est de 20%.
On notera respectivement A,B,C et G les événements « utiliser la roue A », « utiliser la roue B », « utiliser la roue C » et « gagner »

1) $P_A(G) = \frac{32}{100} = 0{,}32$?
2) Donner $P(A \cap G) = P(A)P_A(G) = \frac{1}{6} \times \frac{32}{100} = \frac{4}{75}$
   En utilisant la formule des probabilités totales

$P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G)$
$= P(A)P_A(G) + P(B)P_B(G) + P(C)P_C(G) = \frac{4}{75} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \times 0{,}2$
$= \frac{4}{75} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{8}{25} = 0{,}32$

3) Est-ce que B et G sont indépendants ?
   $P_B(G) = 0{,}5$ et $P(G) = 0{,}32$ donc B et G ne sont pas indépendants
4) Est-ce que A et G son indépendants , que peut-on en déduire concernant $\bar{A}$ et G
5) $P_A(G) = 0{,}32$ et $P(G) = 0{,}32$ donc A et G sont indépendants, et donc $\bar{A}$ et G le sont aussi.
6) $P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{6}}{0{,}32} = 25/48$

Exercice 2 (21 min)

Soit $f: x \to \sqrt{2x-1}$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 5 \end{cases}$

1) Déterminer D_f
   $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ donc $D_f = [\frac{1}{2}; +\infty[$
2) Donner les variations de f sur D_f
   $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ définie et positive sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ donc f est croissante sur D_f
3) Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1; 6]$
   Initialisation : pour n=0, $u_n = u_0 = 5$ donc $u_n \in [1\,; 6]$
   Hérédité : soit un entier k tel que $u_k \in [1; 6]$ montrons qu'il en va de même avec $k+1$
   $u_{k+1} = f(u_k) = \sqrt{2u_k - 1}$ Encadrons cette valeur :
   $1 \leq u_k \leq 6$ (HR) $\Leftrightarrow 2 \leq 2u_k \leq 12 \quad \Leftrightarrow 1 \leq 2u_k - 1 \leq 11 \quad \Leftrightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{2u_k - 1} \leq \sqrt{11} \Leftrightarrow 1 \leq u_{k+1} \leq \sqrt{11}$
   Or $\sqrt{11} \approx 3{,}32$ donc $1 \leq u_{k+1} \leq 6$ d'où l'hérédité
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1; 6]$
4) Donner les variations de (u_n)
   Montrons que (u_n) est décroissante autrement dit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$, je pose P_n : « $u_n \geq u_{n+1}$ »
   Initialisation : pour $u_0 = 5$ donc $u_1 = 3$ on a bien $u_0 \geq u_1$
   Hérédité : soit un entier k tel que $u_k \geq u_{k+1}$ montrons qu'il en va de même au rang suivant.
   F est croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ donc sur $[1; 6]$, donc elle conserve l'ordre sur cet intervalle qui contient u_k et u_{k+1} d'après la question 3, ainsi : $f(u_k) \geq f(u_{k+1})$ donc $u_{k+1} \geq u_{k+2}$ d'où l'hérédité.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ donc (u_n) est décroissante.

Exercice 3 (14min)

1) Donner les primitives des fonctions suivantes

$f(x) = x^2 - 3x + 5$ sur $\mathbb{R}$	$g(x) = \frac{4}{x^2} + 7\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$	$h(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{x(x-2)}}$ sur $]-\infty; 0[$
$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + c$	$G(x) = -\frac{4}{x} + 7\,\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$H(x) = 2\sqrt{x(x-2)} + c$

2) Donner UNE primitive des fonctions suivantes

$i(x)=30x(x^2-5)^{17}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad j(x)=\frac{21x-35}{(3x^2-10x+13)^8}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad k(x)=\frac{3\sin x}{\cos^9 x}$ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$i(x)=15\times 2x(x^2-5)^{17}$ $\quad j(x)=\frac{7}{2}\frac{6x-10}{(3x^2-10x+13)^8}$ $\quad k(x)=-3\frac{-\sin x}{\cos^9 x}$

$I(x)=\frac{15(x^2-5)^{18}}{18}=\frac{5(x^2-5)^{18}}{6}$ $\quad J(x)=\frac{7}{2}\frac{-1}{7(3x^2-10x+13)^7}=\frac{-1}{2(3x^2-10x+13)^7}$ $\quad K(x)=-3\frac{-1}{8\cos^8 x}=\frac{3}{8\cos^8 x}$

3) Donner la primitive ayant pour valeur 3 en 2 de la fonction suivante

$l(x)=(3x-2)\left(x^2-\frac{4}{3}x+7\right)^2=\frac{3}{2}\left(2x-\frac{4}{3}\right)\left(x^2-\frac{4}{3}x+7\right)^2$ sur $\mathbb{R}$

$L(x)=\frac{3}{2}\frac{\left(x^2-\frac{4}{3}x+7\right)^3}{3}+c=\frac{\left(x^2-\frac{4}{3}x+7\right)^3}{2}+c$ donc $L(3)=\frac{\left(3^2-\frac{4}{3}3+7\right)^3}{2}+c=\frac{12^3}{2}+c=864+c$ de plus on veut :

$L(3)=2\Leftrightarrow 864+c=2\Leftrightarrow c=-862$ ainsi $L(x)=\frac{\left(x^2-\frac{4}{3}x+7\right)^3}{2}-862$

Exercice 4 (R.O.C.)(11min)

Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},(1+\pi)^n\geq 1+n\pi$

Posons P_n : «$(1+\pi)^n\geq 1+n\pi$ »

Initialisation : pour $n=0$ on a : $(1+\pi)^n=(1+\pi)^0=1$ et $1+n\pi=0$ donc P_0 est vraie

Hérédité : soit k un entier naturel tel que P_k soit vraie montrons que dans ce cas on a P_{k+1} vraie.

$(1+\pi)^{k+1}=(1+\pi)^k(1+\pi)\geq(1+k\pi)(1+\pi)$ (HR)

$(1+k\pi)(1+\pi)=1+k\pi+\pi+k\pi^2=1+(k+1)\pi+k^2\pi$ or $k^2\pi\geq 0$ donc $(1+k\pi)(1+\pi)\geq 1+(k+1)\pi$

Donc $(1+\pi)^k\geq(1+k\pi)(1+\pi)\geq 1+(k+1)\pi$ donc $(1+\pi)^k\geq 1+(k+1)\pi$

D'où l'hérédité

Conclusion : ainsi $\forall n\in\mathbb{N},(1+\pi)^n\geq 1+n\pi$

Exercice 5 (27min)

Soit f une fonction définie par $f(x)=\frac{2x+3}{(x+3)^3}$ sur $D_f=]-\infty;-3[$

1) Etudiez les variations de f sur D_f. $f'(x)=\frac{2(x+3)^3-(2x+3)3(x+3)^2}{(x+3)^6}=\frac{2(x+3)-(2x+3)3}{(x+3)^4}=\frac{2x+6-6x-9}{(x+3)^4}=\frac{-4x-3}{(x+3)^4}$
   Sur D_f on a : $x\leq -3$ donc $-4x\geq 12$ donc $-4x-3\geq 9$ ainsi sur D_f on a $f'(x)>0$donc f est croissante sur son domaine de définition.
2) Donner les limites de f aux bornes de D_f, en déduire les asymptotes.
   $\lim\limits_{x\to-3^-}2x+3=-3$ et $\lim\limits_{x\to-3^-}(x+3)^3=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{2x+3}{(x+3)^3}=+\infty$
   $$f(x)=\frac{2x+3}{(x+3)^3}=\frac{2x+3}{x^3+9x^2+27x+27}=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{9}{x}+\frac{27}{x^2}+\frac{27}{x^3}\right)}=\frac{1}{x^2}\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{9}{x}+\frac{27}{x^2}+\frac{27}{x^3}}$$
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{9}{x}+\frac{27}{x^2}+\frac{27}{x^3}}=2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$
3) Prouver l'existence et l'unicité de la solution de $f(x)=\frac{544}{1331}$,
   La fonction est continue, monotone strictement croissante sur D_f de plus $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{2x+3}{(x+3)^3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $\frac{544}{1331}\in]0;+\infty[$ donc d'après l'extension du théorème de la bijection il existe une unique solution à l'équation $(x)=\frac{544}{1331}$
4) Déterminer un encadrement au centième de cette solution : $-5{,}74<x<-5{,}76$
5) En déduire a et b tels que $f(x)=\frac{a}{(x+3)^2}+\frac{b}{(x+3)^3}$
   $$\frac{a}{(x+3)^2}+\frac{b}{(x+3)^3}=\frac{a(x+3)+b}{(x+3)^3}=\frac{ax+3a+b}{(x+3)^3}$$
   $f(x)=\frac{a}{(x+3)^2}+\frac{b}{(x+3)^3}\Leftrightarrow\frac{2x+3}{(x+3)^3}=\frac{ax+3a+b}{(x+3)^3}\Leftrightarrow 2x+3=ax+3a+b\Leftrightarrow\begin{cases}2=a\\3=3a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=a\\-3=b\end{cases}$
   Donc $f(x)=\frac{2}{(x+3)^2}+\frac{-3}{(x+3)^3}$
6) En déduire la primitive de f sur D_f qui s'annule en 2.

$F(x)=\frac{-2}{(x+3)^1}+\frac{3}{2(x+3)^2}+c$ ainsi $F(2)=\frac{-2}{(5)^1}+\frac{3}{2(5)^2}+c=-\frac{17}{50}+c$

F s'annule en 2 donc $-\frac{17}{50}+c=0$ ainsi $F(x)=\frac{-2}{(x+3)^1}+\frac{3}{2(x+3)^2}+\frac{17}{50}$

Exercice 6 (11minutes)

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$ avec $f(x)=\sqrt{\frac{3x-8}{x-5}}$
2) $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ avec $g(x)=\sqrt{x^2+4x-5}-\sqrt{x^2-2x+3}$
3) $\lim_{x\to 0} h(x)$ avec $h(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ (BONUS $\lim_{x\to 0} z(x)$ avec $(x)=\frac{\sin x}{x}$) pensez aux dérivées et taux de variation.

1) $\lim_{x\to 5^+} x-5=0^+$ et $\lim_{x\to 5^+} 3x-8=7$ donc $\lim_{x\to 5^+}\frac{3x-8}{x-5}=+\infty$, de plus $\lim_{y\to +\infty}\sqrt{y}=+\infty$ donc par composition $\lim_{x\to 5^+} f(x)=+\infty$

$\sqrt{x^2+4x-5}-\sqrt{x^2-2x+3}=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x-5}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{x^2-2x+3}\right)}{\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{x^2-2x+3}}=\frac{x^2+4x-5-x^2+2x-3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=$

$\frac{2x-8}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(2-\frac{8}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}-x\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(2-\frac{8}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)}=\frac{\left(2-\frac{8}{x}\right)}{\left(-\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)}$

Donc $\lim_{x\to -\infty} g(x)=-1$

$\frac{\cos x-1}{x}=\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}$ or la fonction $\cos x$ admet pour dérivée $\sin x$ sur $\mathbb{R}$ donc la limite du taux de variation vaut $\sin 0=0$