Primitives

Exercice n°1

Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition

$a(x) = 2 + 3x$ $b(x) = 5x - 7x^2 + 12x^3$ $c(x) = 2 - 50x + 13x^9$

$d(x) = 5x^n - 14x^{2n} + 8x^{n-7}$

$e(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x^2}$ $f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}$ $g(x) = 5x + \frac{2}{x^2} - 17x^{-4}$

$h(x) = 3x - 4 + x^{-4} + \frac{2}{x^4}$ $i(x) = \frac{9}{x^n} - \frac{13}{x^{2n}} + \frac{19}{x^{n-5}}$ (avec $n \neq 1$ et $n \neq 6$)

$j(x) = \cos(x) - 8\sin(x)$ $k(x) = 5x^6 - \frac{7}{\sqrt{x}}$ $l(x) = \frac{x^2+3x-1}{3}$

$m(x) = (10x + 3)(5x^2 + 3x - 2)^3$ $n(x) = (35x^6 - 3)(5x^7 - 3x)^7$ $o(x) = (\cos x)(\sin x)^4$

$p(x) = (5x + 9)(5x^2 + 18x)^{11}$ $q(x) = \left(\frac{35}{9}x^9 - 2x^7\right)^2 (30x^8 - 12x^6)$

$r(x) = \frac{6x+5}{(3x^2+5x+7)^5}$ $s(x) = \frac{8}{(8x-9)^7}$ $t(x) = \frac{3x^2-5}{(x^3-5x+4)^{11}}$

$u(x) = \frac{5x-7}{(5x^2-14x+7)^9}$ $v(x) = \frac{13}{(9x-7)^5}$

$w(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$ $y(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ $z(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{-x^2-5x+6}} - 1$

Exercice n°2 : On considère la fonction f définie sur $I =]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+8}{(x+1)^2}$.

1. Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que pour tout x de I, on ait : $f(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2}$.
2. En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercice n°3 : On considère la fonction g définie sur $I =]1\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de I, on ait : $g(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$.
2. En déduire la primitive de g qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 2.

Exercice n°4 : Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

1. **a.** Calculer la dérivée de $u\sqrt{u}$ sur I.
   b. En déduire une primitive de $u'\sqrt{u}$ sur I.

2. Applications : déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes :
   a. $f(x) = \sqrt{x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$ **b.** $f(x) = \sqrt{1-x}$ sur $I =]-\infty\,;1[$
   c. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice n°5 : Soient les fonctions h et g définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1. Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
2. Déterminer la primitive F de $h + g$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
3. En déduire la primitive H de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Exercice n°6 : Soient les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \cos^2 x$ et $v(x) = \sin^2 x$

1. Déterminer la primitive S de $u + v$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
2. **a.** Soit x un réel, exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$
   b. En déduire la primitive D de $u - v$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
3. Déterminer alors les primitives U et V respectivement de u et v sur $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0.

Exercice n°7

Prouver qu'à chaque question la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I indiqué

a) $f(x) = \tan^2 x$, $F(x) = \tan x - x$ $I =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

b) $f(x) = \cos x - x\sin x$ $F(x) = x\cos x$ $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$ $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ $I = \mathbb{R}_+^*$

Primitives (corrections)

Exercice n°1

Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition

$a(x) = 2 + 3x$
$A(x) = 2x + \frac{3x^2}{2}$

$b(x) = 5x - 7x^2 + 12x^3$
$B(x) = \frac{5x^2}{2} - \frac{7x^3}{3} + \frac{12x^4}{4}$

$c(x) = 2 - 50x + 13x^9$
$C(x) = 2x - \frac{50x^2}{2} + \frac{13x^{10}}{10}$

$d(x) = 5x^n - 14x^{2n} + 8x^{n-7}$
$D(x) = \frac{5x^{n+1}}{n+1} - \frac{14x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{8x^{n-6}}{n-6}$

$e(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x^2}$
$E(x) = \frac{3x^2}{2} - 2x - \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}$
$F(x) = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$

$g(x) = 5x + \frac{2}{x^2} - 17x^{-4}$
$G(x) = \frac{5x^2}{2} - \frac{2}{3x^3} - \frac{17x^{-3}}{-3}$

$h(x) = 3x - 4 + x^{-4} + \frac{2}{x^4}$
$H(x) = \frac{3x^2}{2} - 4x + \frac{-3}{3x^3}$
$= \frac{3x^2}{2} - 4x - \frac{1}{x^3}$

$i(x) = \frac{9}{x^n} - \frac{13}{x^{2n}} + \frac{19}{x^{n-5}}$ (avec $n \neq 1$ et $n \neq 6$)
$I(x) = -\frac{9}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{-13}{(2n-1)x^{2n-1}} + \frac{-19}{(n-6)x^{n-6}}$
$= -\frac{9}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{13}{(2n-1)x^{2n-1}} - \frac{19}{(n-6)x^{n-6}}$

$j(x) = \cos(x) - 8\sin(x)$
$J(x) = \sin(x) + 8\cos(x)$

$k(x) = 5x^6 - \frac{7}{\sqrt{x}}$
$K(x) = \frac{5x^7}{7} - 7 \times 2\sqrt{x}$

$l(x) = \frac{x^2+3x-1}{3}$
$L(x) = \frac{\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x}{3} = \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}$

$m(x) = (10x + 3)(5x^2 + 3x - 2)^3$
$M(x) = \frac{(5x^2+3x-2)^4}{4}$

$n(x) = (35x^6 - 3)(5x^7 - 3x)^7$
$N(x) = \frac{(5x^7-3x)^8}{8}$

$o(x) = (\cos x)(\sin x)^4$
$O(x) = -\frac{(\sin(x))^5}{5}$

$p(x) = (5x + 9)(5x^2 + 18x)^{11}$
$p(x) = \frac{1}{2}(10x + 18)(5x^2 + 18x)^{11}$
$P(x) = \frac{1}{2}\frac{(5x^2+18x)^{12}}{12}$

$q(x) = \left(\frac{35}{9}x^9 - 2x^7\right)^2 (30x^8 - 12x^6)$
$q(x) = \left(\frac{35}{9}x^9 - 2x^7\right)^2 (35x^8 - 14x^6)\frac{6}{7}$
$Q(x) = \frac{6}{7}\frac{\left(\frac{35}{9}x^9-2x^7\right)^3}{3}$

$r(x) = \frac{6x+5}{(3x^2+5x+7)^5}$
$R(x) = \frac{-1}{4(3x^2+5x+7)^4}$

$s(x) = \frac{8}{(8x-9)^7}$
$S(x) = \frac{-1}{6(8x-9)^6}$

$t(x) = \frac{3x^2-5}{(x^3-5x+4)^{11}}$
$T(x) = \frac{-1}{10(x^3-5x+4)^{10}}$

$u(x) = \frac{5x-7}{(5x^2-14x+7)^9}$
$u(x) = \frac{1}{2}\frac{10x-14}{(5x^2-14x+7)^9}$
$U(x) = \frac{1}{2}\frac{10x-14}{8(5x^2-14x+7)^8}$

$v(x) = \frac{13}{(9x-7)^5}$
$v(x) = \frac{13}{9}\frac{9}{(9x-7)^5}$
$V(x) = \frac{13}{9}\frac{-1}{4(9x-7)^4}$

$w(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$
$W(x) = 2\sqrt{2x+1}$

$y(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$
$Y(x) = 2\sqrt{x^2+1}$

$z(x) = -\frac{-2x-5}{\sqrt{-x^2-5x+6}} - 1$
$Z(x) = -2\sqrt{-x^2-5x+6} - x$

Exercice n°2

1) $\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2} = \frac{\alpha(x+1)+\beta}{(x+1)^2} = \frac{\alpha x+\alpha+\beta}{(x+1)^2}$ donc $f(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{3x+8}{(x+1)^2} = \frac{\alpha x+\alpha+\beta}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 3x + 8 = \alpha x + \alpha + \beta$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha + \beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 5 \end{cases}$ ainsi $f(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{8}{(x+1)^2}$

2) $F(x) = 3\ln(x + 1) + \frac{-5}{x+1} + c$ or on veut que $F(0) = 0 \Leftrightarrow 3\ln(0 + 1) + \frac{-5}{0+1} + c = 0 \Leftrightarrow -5 + c = 0$

Donc $F(x) = 3\ln(x + 1) + \frac{-5}{x+1} + 5$

Exercice n°3

$\frac{\alpha}{(x-1)^2}+\frac{\beta}{(x-1)^3}=\frac{\alpha(x-1)+\beta}{(x-1)^3}=\frac{\alpha x-\alpha+\beta}{(x-1)^3}$ donc $g(x)=\frac{\alpha}{(x-1)^2}+\frac{\beta}{(x-1)^3} \Leftrightarrow \frac{2x+3}{(x-1)^3}=\frac{\alpha x-\alpha+\beta}{(x-1)^3} \Leftrightarrow 2x+3=\alpha x-\alpha+\beta$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ -\alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=5 \end{cases}$ ainsi $g(x)=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{5}{(x-1)^3}$

2) $G(x)=-\frac{2}{x-1}-\frac{5}{2(x-1)^2}+c$ or on veut que $G(2)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{2-1}-\frac{5}{2(2-1)^2}+c=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2-\frac{5}{2}+c=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow c=5$ donc $G(x)=-\frac{2}{x-1}-\frac{5}{2(x-1)^2}+5$

Exercice n°4

1) a) $(u\sqrt{u})'=u'\sqrt{u}+u\times\frac{u'}{2\sqrt{u}}=u'\sqrt{u}+\frac{1}{2}u'\sqrt{u}=\frac{3}{2}u'\sqrt{u}$

b) $u'\sqrt{u}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}u'\sqrt{u}$ donc $u'\sqrt{u}$ a pour primitives : $\frac{2}{3}u\sqrt{u}+c$

2) a) $f(x)=\sqrt{x}=1\sqrt{x}$ donc $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

b) $f(x)=\sqrt{1-x}=-1\times(-1\sqrt{1-x})$ donc $F(x)=-1\times(1-x)\sqrt{1-x}=(x-1)\sqrt{1-x}$

c) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}\left(2x\sqrt{x^2+1}\right)$ donc $F(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

Exercice n°5

Prouver

$g(x)=\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\,\frac{2x}{1+x^2}$ donc $G(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$ de plus on veut $G(0)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1+0^2)+c=0 \Leftrightarrow$ c=0

Ainsi $G(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

2) $f(x)=\ h(x)+g(x)=\frac{x^3}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{x^3+x}{1+x^2}=\frac{x(1+x^2)}{1+x^2}=x$ donc $F(x)=\frac{x^2}{2}+c$

De plus on veut que $F(0)=0 \Leftrightarrow \frac{0^2}{2}+c=0 \Leftrightarrow c=0$ ainsi $F(x)=\frac{x^2}{2}$

3) $h(x)=f(x)-g(x)$ donc $H(x)=F(x)-G(x)+c=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$

De plus on veut que $H(0)=0 \Leftrightarrow c=0$ donc $H(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Exercice n°6

1)$s(x)=u(x)+v(x)=(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$ donc $S(x)=x+c$

de plus on veut $S(0)=0$ donc $0+c=0$ donc $S(x)=x$

2)a) $\cos(2x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=(\cos x)^2-(\sin x)^2$

b) $d(x)=u(x)-v(x)=(\cos x)^2-(\sin x)^2=\cos(2x)=\frac{1}{2}2\cos(2x)$ donc $D(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)+c$

on veut $D(0)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(0)+c=0 \ \Leftrightarrow c=0$

c) on a : $s(x)=u(x)+v(x)$ et $d(x)=u(x)-v(x)$ donc $u(x)=\frac{1}{2}\big(s(x)+d(x)\big)$ et $v(x)=\frac{1}{2}\big(s(x)-d(x)\big)$

ainsi $U(x)=\frac{1}{2}\big(S(x)+D(x)\big)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin(2x)\right)$ pas besoin de chercher de constante S et D s'annulent en 0

et $V(x)=\frac{1}{2}\big(S(x)-D(x)\big)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)$ pas besoin de chercher de constante S et D s'annulent en 0

Exercice n°7

Prouver qu'à chaque question la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I indiqué

a) $F(x)=\tan x-x=\frac{\sin x}{\cos x}-x$ donc $F'(x)=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{(\cos x)^2}-1=\frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2}+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}-1=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=(\tan x)^2=f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur I.

b) $F'(x)=1\cos x+x(-\sin x)=f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur I

c) $F'(x)=2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=2\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)=f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur I