Chap 3 – Dérivabilité & primitives

Dans tout ce chapitre, f sera une fonction définie sur I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $h > 0$ tel que $a + h \in I$, et C_f est la courbe représentative de f.

I. Rappels

1. Dérivabilité en un point :

Définition 1: f est dérivable en $a \in I$ ssi la limite du taux d'accroissement $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (ou $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ qui lui est équivalente) existe et est finie. On appelle cette limite $f\,'(a)$.

• Exemples de fonctions non dérivables en certains points (…)

Propriétés :

• $f\,'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a. Cette tangente a pour équation $\boxed{y = f\,'(a)(x-a) + f(a)}$.

• Si f' est elle-même dérivable, sa dérivée est notée $f\,''$ et appelée « f seconde » ou «dérivée seconde de f ». Les dérivées suivantes sont notées $f^{(3)}$dérivée troisième, $f^{(4)}$dérivée quatrième, $f^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Calculer les dérivées successives de $f(x) = x^4 + x^2$ et $g(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

• En physique, si $f(t)$ est la loi du mouvement d'un mobile, $f\,'(t_0)$ et $f\,''(t_0)$ sont respectivement la vitesse instantanée et l'accélération instantanée du mobile à l'instant t_0.

2. Ecriture différentielle et approximation affine :

Propriété 1 : Si f est dérivable en $x \in I$, alors il existe une fonction ε telle que

$$f(x+h) = f(x) + h \times f'(x) + h \times \varepsilon(h)\text{ , avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On en déduit une approximation affine de f : $\boldsymbol{f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)}$

Autre notation : En posant $\Delta(x) = (x+h) - x$ et $\Delta(y) = f(x+h) - f(x)$ on obtient $f(x+h) - f(x) \approx f'(x)(x+h-x)$, soit $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. On écrit symboliquement $\boldsymbol{dy = f\,'(x)\,dx}$ ou encore $\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$. C'est la **notation différentielle**.

3. Dérivées des fonctions usuelles et opérations sur les dérivées:

intervalle de validité	fonction	dérivée
	k	
	$ax+b$	
	x^n, avec $n \in \mathbb{N}^*$	
	$\frac{1}{x}$	
	$\frac{1}{x^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	
	$\sqrt{x}$	
	$\cos(x)$	
	$\sin(x)$	

validité	opération	dérivée
u et v dérivables	$u+v$	
u dérivable	$k \times u, k \in \mathbb{R}$	
u et v dérivables	$u \times v$	
u dérivable et $u(x) \neq 0$	$\frac{1}{u}$	
u et v dérivables et $v(x) \neq 0$	$\frac{u}{v}$	

Exemple : Calculer la dérivée des fonctions suivantes : $f(x) = \frac{2x^3}{5} - \frac{5x^2}{x+1}$ et $g(x) = \frac{1}{2+\sin(x)}$.

II. Compléments :

1. Dérivabilité et continuité :

Propriété 2: Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration :

Application : On a montré en 1ère que les fonctions polynôme, rationnelles, sinus et cosinus sont dérivables sur leur ensemble de définition. Cela montre qu'elles sont continues sur ces ensembles.

Attention : **la réciproque de ce théorème est fausse**. (*f continue n'implique pas nécessairement f dérivable).*

Donner un contre-exemple : ………………………………………………………………

2. Dérivée d'une fonction composée :

Théorème 3: Si u est une fonction dérivable sur I et v dérivable en $u(x)$ pour tout $x \in I$, alors la fonction composée $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $\boldsymbol{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))}$.

Remarque : on note $\boxed{(\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{u})' = \boldsymbol{u}'.\boldsymbol{v}' \circ \boldsymbol{u}}$.

Principe de démonstration :

Exemple : Soient les fonctions $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ et $(x) = (x^2 + 1)^3$. Sur quels ensembles sont-elles dérivables ? Calculer leur dérivée.

Corollaire 4 : *dérivées de fonctions composées :*

Démonstration : on applique la formule $(v \circ u)'$.

Exemple : dériver $\sqrt{ax + b}$. Sur quel intervalle cette dérivée existe-t-elle ?

intervalle de validité	fonction	dérivée
u dérivable sur I	$\cos(u)$	
u dérivable sur I	$\sin(u)$	
u dérivable sur I	u^n, avec $n \in \mathbb{N}^*$	
u dérivable et $u(x) \neq 0$ sur I	$\frac{1}{u^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	
$u(x) > 0$ sur I	$\sqrt{u}$	

III. Applications :

1. Sens de variation d'une fonction :

Théorème 5 (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **Si** pour tout $x \in I$, $f'(x)$ est strictement positive (ou nulle en quelques points isolés) **alors** la fonction f est strictement croissante sur I.
- **Si** pour tout $x \in I$, $f'(x)$ est strictement négative (ou nulle en quelques points isolés) **alors** la fonction f est strictement décroissante sur I.
- **Si** pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ **alors** la fonction f est constante sur I.

Exemple : Sens de variation de $f(x) = (2x - 3)^3$ sur $\mathbb{R}$?

2. Extremums :

Propriété 6: Soit f une fonction dérivable sur $]a; b[$ et $x_0 \in]a\,;\, b[$. Si f' s'annule **et change de signe** en x_0, alors f admet une extremum local en x_0.

Remarque : Le signe de la dérivée permet de dire s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

Exemple : Etudier les extrema locaux de $f(x) = (2x - 3)^3$ sur $\mathbb{R}$.

IV. Primitive d'une fonction :

Introduction : Donner une fonction F dont la dérivée est $f(x) = x^2$, puis toutes les fonctions dont la dérivée est $f(x) = x^2$.

1. définition :

Définition 1: On appelle **primitive de la fonction *f*** sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f : on a donc $F' = f$.

Propriété 1:
a) Si f admet une primitive F sur I, alors toute fonction G où G(x) = F(x) + k , k étant un réel, est aussi une primitive de f .
b) De plus si H est une autre primitive de f , alors il existe k tel que H = F + k.
c) Conséquence : f admet en fait une infinité de primitives sur I : toutes les fonctions F + k où k est une constante quelconque. Une seule de ces primitives s'annule en une valeur x_0 de I.

*On démontrera plus tard que **toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.***

Exercice 1 : Soient f et g définies sur]0 ; +∞[telles que $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x \ln x - x$. Montrer que g est une primitive de f puis trouver la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

2. Primitives « de base » à connaître :

Fonction f	Primitives F	Ensemble de définition
a (constante)		
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$		
$1/x^2$ (cas $n = -2$)		
$1/\sqrt{x}$ (cas $n = -1/2$)		
$1/x$		
e^x		
$\cos x$		
$\sin x$		
$f + g$		
αf, α constante		

Exercice 2 : déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{2}{x} - 5x^4$

$g(x) = 3 \sin x$

$h(x) = 2e^x - x^6 + \dfrac{1}{3x}$

3. Primitives de fonctions composées :

Fonction f	Une primitive F
$u'u^n, n \in \mathbb{Z}$	
$\dfrac{u'}{u}$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	

Fonction f	Une primitive F
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	
$u'e^u$	
$u' \cos u$	
$u' \sin u$	
$u' \times g \circ u$	

Remarques *:*
- u et f sont continues.
- Attention il peut y avoir des conditions à vérifier sur u ($u \neq 0$, $u > 0$…)
- **Il n'y a pas de formules de primitives pour uv et $\frac{u}{v}$** . On ne peut pas déterminer les primitives dans ce cas.

i. Comment trouver une primitive :

On cherche dans le tableau la formule qui s'approche le plus, et on ajuste si nécessaire avec un coefficient constant.

Exemple avec une primitive de $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$:

Exemple 3 : Déterminer une primitive de $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$, $g(x) = e^{x+1}$, $h(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$, $i(x) = e^{-x}$, $j(x) = e^{2x}$
$k(x) = x\cos(x^2 + 5)$, $l(x) = x + \frac{x}{(x^2+1)^2}$, $m(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3\,e^{\frac{1}{2}x}$.

Remarque : *la plupart des fonctions continues, même simples, ne possèdent pas de primitives qui s'écrivent avec des fonctions usuelles. Exemple : $x \mapsto e^{x^2}$.*

Démonstration propriété 1

Soit f une fonction dérivable en $x \in I$

On sait alors que $f'(x)$ existe et donc que $\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$ a une limite quand h tend vers 0 et cette limite est $f'(x)$.

En posant $\varepsilon(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} - f'(x)$ on a donc $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$

En multipliant les deux membres par h on obtient $h\,\varepsilon(h) = f(x+h) - f(x) - hf'(x)$ et donc :

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\,\varepsilon(h)$

Vu que $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ quand h est proche de 0 alors $\varepsilon(h)$ aussi et $h\,\varepsilon(h)$ encore plus.

Donc pour des valeurs de h assez petite on aura $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$

Démonstration du théorème 3 (dérivée de composée de fonctions)

Soit a un réel avec g dérivable sur un intervalle ouvert contenant a.

On pose $b = g(a)$, soit f une fonction dérivable sur un intervalle contenant b.

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0} g(a+h) - g(a) = 0$ ainsi en posant $k = g(a+h) - g(a)$ on a :

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}\times\frac{k}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}\times\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\
&= f'(g(a))\times g'(a) \text{ on a}
\end{aligned}
$$

Pour la dernière égalité on a utilisé à deux reprises la définition de la dérivée en un point et pour la première partie on a aussi utilisé la propriété de composition des limites.

Conclusion : $(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\times g'(a)$

Applications intéressantes :

Les fonctions du type $\frac{1}{u(x)}$, $\sqrt{u(x)}$ et $u^n(x)$ pour commencer.

Plus tard il y aura aussi celles du type : $\ln(u(x))$ et $e^{u(x)}$.