Pondichery 2010

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une dé monstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lll} x &=& t+2\\ y &=& -2t\\ z &=& 3t-1\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.
2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.
3. Les droites de représentations paramétriques respectives $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 2-3t\\ y &=& 1+t\\ z &=& -3+2t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 7+2u\\ y &=& 2+2u\\ z &=& -6-u\end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.
4. On considère les points :
   A, de coordonnées $(-1 ; 0 ; 2)$, B, de coordonnées $(1 ; 4 ; 0)$, et C, de coordonnées $(3 ; -4 ; -2)$.
   Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.
5. On considère les points :
   A, de coordonnées $(-1 ; 1 ; 3)$, B, de coordonnées $(2 ; 1 ; 0)$, et C, de coordonnées $(4 ; -1 ; 5)$.
   On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

1. Un vecteur directeur de la droite D de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lll} x &=& t+2\\ y &=& -2t\\ z &=& 3t-1\end{array}\right.$ est $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; -2 ; 3)$.
   Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; 1)$. Or $\vec{u}\cdot\vec{n} = 1\times1+(-2)\times2+3\times1 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, la droite D est parallèle au plan P dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.
   Il était possible aussi de chercher le(s) point(s) d'intersection de D et de P et chercher t tel que $(t+2)+2(-2t)+(3t-1)=0$ ceci est équivalent à $1=0$ ce qui est impossible, donc D et P n'ont pas de point commun, D est strictement parallèle à P. **VRAI**
2. Pour chercher les points communs à ces trois plans il faut résoudre le système : $\left\{\begin{array}{lll} x-2y+3z &=& 3 \quad L_1\\ 2x+3y-2z &=& 6 \quad L_2\\ 4x-y+4z &=& 12 \quad L_3\end{array}\right.$
   $L_1+L_2+L_3$ et L_3-L_1 conduisent au système : $\left\{\begin{array}{lll} x-2y+3z &=& 3\\ 7x+5z &=& 21\\ 7x+5z &=& 21\end{array}\right.$ soit
   $\left\{\begin{array}{lll} x-2y+3z &=& 3\\ 7x+5z &=& 21\end{array}\right.$
   L'intersection de deux plans est une droite donc **FAUX**.
3. Pour déterminer l'éventuel point d'intersection des droites citées, il faut chercher des réels t et u tels que
   $\left\{\begin{array}{lll} x= & 2-3t= & 7+2u\\ z= & -3+2t= & -6-u\\ y= & 1+t= & 2+2u\end{array}\right.$ donc résoudre le système $\left\{\begin{array}{lll} 3t+2u &=& -5\\ 2t+u &=& -3\\ t-2u &=& 1\end{array}\right. \Rightarrow$
   $\left\{\begin{array}{lll} 2t+u &=& -3\\ t-2u &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} 5t &=& -5\\ t-2u &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} t &=& -1\\ u &=& -1\end{array}\right.$ et dans ce cas on a bien $3t+2u=-5$ donc les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection est $A(5 ; 0 ; -5)$. **VRAI**
4. On considère les points A, de coordonnées $(-1 ; 0 ; 2)$, B de coordonnées $(1 ; 4 ; 0)$, et C, de coordonnées $(3 ; -4 ; -2)$. Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.
   $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2 ; 4 ; -2)$
   $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(4 ; -4 ; -4)$
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc le plan (ABC) existe. Les coordonnées de A, B et C vérifient $x+z=1$ donc le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$. **VRAI**.
5. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3 ; 0 ; -3)$
   $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(5 ; -2 ; 2)$
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc C n'appartient pas à la droite (AB).
   On ne peut pas écrire C comme barycentre des points A et B donc **FAUX**.

Liban 2010

EXERCICE 2 **4 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On note (D) la droite passant par les points A(1 ; −2 ; −1) et B(3 ; −5 ; −2).

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -2-3t \\ z & = & -1-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-k \\ y & = & 1+2k \\ z & = & k \end{array}\right. \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x+y+5z+3=0$.
   - **a.** Montrer que le plan (P) contient la droite (D).
   - **b.** Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}$ (1 ; 1 ; −1).
   - **a.** Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.
   - **b.** Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

Correction

1. La droite (D) passe par A(1 ; −2 ; −1) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2 ; -3 ; -1)$.
Elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -2-3t \\ z & = & -1-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-k \\ y & = & 1+2k \\ z & = & k \end{array}\right. \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

La droite (D′) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 2 ; 1)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles), donc les droites (D) et (D′) ne sont pas parallèles.
Les droites (D) et (D′) ont un point en commun si et seulement si il existe deux réels t et k tels que $\left\{\begin{array}{lcll} 1+2t & = & 2-k & (l_1) \\ -2-3t & = & 1+2k & (l_2) \\ -1-t & = & k & (l_3) \end{array}\right.$. Or $(l_1)+(l_2)-(l_3) \iff 0=3$ (impossible). Les trois équations sont incompatibles et les droites n'ont pas de point commun. Les droites (D) et (D′) ne sont ni sécantes ni parallèles, elles sont donc non coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x+y+5z+3=0$.
   - **a.** Pour tout réel t, on a $4(1+2t)+(-2-3t)+5(-1-t)+3=0$, donc tout point de (D) appartient au plan (P). La droite (D) est donc incluse dans le plan (P).
   - **b.** $M(x ; y ; z) \in (P) \cap (D') \iff$ il existe un réel k tel que
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-k \\ y & = & 1+2k \\ z & = & k \\ 4x+y+5z+3 & = & 0 \quad (e) \end{array}\right.$$
   $(e) \iff 4(2-k)+(1+2k)+5k+3=0 \iff k=-4$
   $M(x ; y ; z) \in (P) \cap (D' \iff \left\{\begin{array}{lclcl} x & = & 2+4 & = & 6 \\ y & = & 1-8 & = & -7 \\ z & = & -4 & = & -4 \end{array}\right.$ Le point C a pour coordonnées (6 ; −7 ; −4).

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}$ (1 ; 1 ; −1).
   - **a.** $\vec{u} \cdot \vec{w} = (-1) \times (1) + (2) \times (1) + (1) \times (-1) = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ directeurs de (Δ) et (D′) sont orthogonaux. Les deux droites sont donc orthogonales. Elles possèdent le point C en commun, elles sont donc perpendiculaires
   - **b.** De même, $\vec{w} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc les droites (Δ) et (D) sont orthogonales. La droite (Δ) a pour représentation paramétrique :

$$s \iff \left\{\begin{array}{lcll} 2t-\lambda & = & 5 & (l_1) \\ 3t+\lambda & = & 5 & (l_2) \\ t-\lambda & = & 3 & (l_3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcll} 2t-\lambda & = & 5 & (l_1) \\ 5t & = & 10 & (l_2+l_1) \\ -t & = & -2 & (l_3-l_1) \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & -1 \\ t & = & 2 \end{array}\right.$$

Les deux droites se coupent perpendiculairement en un point E$(x ; y ; z)$ tel que $\left\{\begin{array}{lclclcl} x & = & 1+4 & = & 6-1 & = & 5 \\ y & = & -2-6 & = & -7-1 & = & -8 \\ z & = & -1-2 & = & -4+1 & = & -3 \end{array}\right.$.
Le point E a pour coordonnées (5 ; −8 ; −3).

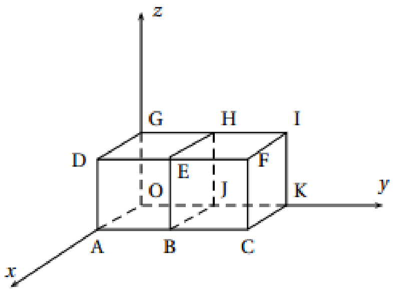
Asie 2010

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

*Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points : A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 2, 0), D(1, 0, 1), E(1, 1, 1), F(1, 2, 1), G(0, 0, 1), H(0, 1, 1), I(0, 2, 1), J(O, 1, 0), K(0, 2, 0) comme indiqués sur la figure ci -contre :



1. Question 1 : Le triangle GBI est :

   Réponse **a** : isocèle. Réponse **b** : équilatéral. Réponse **c** : rectangle.

2. Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés {(O, 2), (A, -1), (C, 1)} est :

   Réponse **a** : le point K. Réponse **b** : le point I. Réponse **c** : le point J.

3. Question 3 : Le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC}$ est égal à :

   Réponse **a** : 1. Réponse **b** : -1. Réponse **c** : 2.

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

   Réponse **a** : sont non coplanaires. Réponse **b** : forment un rectangle. Réponse **c** : forment un carré.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

   Réponse **a** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& 2+t \\ z &=& t \end{array}\right.$. Réponse **b** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+4t \\ y &=& t \\ z &=& 4t \end{array}\right.$. Réponse **c** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 1-t \end{array}\right.$.

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

   Réponse **a** : $2x+2y-z-2=0$. Réponse **b** : $x+y-3=0$. Réponse **c** : $x+y+2z=2$.

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

   Réponse **a** : $\sqrt{2}$. Réponse **b** : 2. Réponse **c** : $\dfrac{1}{2}$.

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

   Réponse **a** : $\dfrac{1}{2}$. Réponse **b** : $\dfrac{1}{6}$. Réponse **c** : $\dfrac{1}{3}$.

1. Question 1 : Le triangle GBI est :

   Réponse **a** : isocèle. Réponse **b** : équilatéral. Réponse **c** : rectangle.
   On a $GB^2 = 1+2 = 3 \Rightarrow GB = \sqrt{3}$; de même $BI = \sqrt{3}$ et $GI = 2$. Le triangle GBI est isocèle.

3. Question 3 : Le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC}$ est égal à :

   Réponse **a** : 1. Réponse **b** : -1. Réponse **c** : 2.
   Avec $\overrightarrow{AH}\,(-1\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{FC}\,(0\,;\,0\,;\,-1)$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC} = -1$.

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

   Réponse **a** : sont non coplanaires. Réponse **b** : forment un rectangle. Réponse **c** : forment un carré.
   On a BC = HI = 1 et $CI = BH = \sqrt{2}$. Ces points sont coplanaires (ils appartiennent au plan d'équation $x+z=1$), donc BCIH est un parallélogramme. Or $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CI} = 0+0+0 = 0$. Le parallélogramme a un angle droit : c'est un rectangle.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre t de la droite (KE) est :

   On a $\overrightarrow{KE}\,(1\,;\,-1\,;\,1)$. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (KE) \iff \overrightarrow{KM} = u\overrightarrow{KE}, u \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-0 &=& u \\ y-2 &=& -u \\ z-0 &=& u \end{array}\right.$

   $\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& u \\ y &=& 2-u \\ z &=& u \end{array}\right.$

   En posant $t = 1-u \iff u = 1-t$, on obtient

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (KE) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 1-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

   Réponse **a** : $2x+2y-z-2=0$. Réponse **b** : $x+y-3=0$. Réponse **c** : $x+y+2z=2$.
   Les coordonnées de G, B et K ne vérifient que l'équation $x+y+2z=2$.

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

   Réponse **a** : $\sqrt{2}$. Réponse **b** : 2. Réponse **c** : $\dfrac{1}{2}$.
   Une équation du plan (ADH) est $x+y-1=0$. Donc $d(C, ADH) = \dfrac{|1+2-1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

Réponse **a** : $\frac{1}{2}$.   Réponse **b** : $\frac{1}{6}$.   Réponse **c** : $\frac{1}{3}$.

On prend comme base BJK dont l'aire est $\frac{1}{2}$, comme hauteur HJ = 1, d'où un volume égal à $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

Baccalauréat S Centres étrangers 14 juin 2010

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathcal{D}_1)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+2t \\ y & = & -3t \\ z & = & 1+t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_2)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 5-t \\ z & = & -2+t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le point A de coordonnées (2 ; −1 ; 3) et la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathcal{D})\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+4t \\ y & = & -2+2t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Le plan $(\mathcal{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$ a pour équation : $2x + y - z = 0$.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k})$, on considère les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathcal{D}_1)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+2t \\ y & = & -3t \\ z & = & 1+t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_2)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 5-t \\ z & = & -2+t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux :

$$\vec{u}_1 \left|\begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ 1 \end{array}\right. \cdot \vec{u}_2 \left|\begin{array}{l} -2 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right. = 2 \times -2 + (-3) \times (-1) + 1 \times 1 = 0$$

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k})$, on considère le point A de coordonnées (2 ; −1 ; 3) et la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathcal{D})\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+4t \\ y & = & -2+2t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Le plan $(\mathcal{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$ a pour équation : $2x + y - z = 0$, car un vecteur normal au plan est $\vec{u} \left|\begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right. \mathbin{/\!/} \vec{v} \left|\begin{array}{l} 4 \\ 2 \\ -2 \end{array}\right.$ qui est un vecteur directeur à la droite $(\mathcal{D})$.

De plus, le point A(2 ; −1 ; 3) appartient au plan car ses coordonnées vérifient l'équation du plan $(\mathcal{P})$: $2 \times 2 + (-1) - 3 = 0$.

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud ∾
Novembre 2010

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

On admet que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Si Δ coupe $\mathscr{D}$ en le point I et $\mathscr{D}'$ en le point J, la distance IJ est appelée distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.

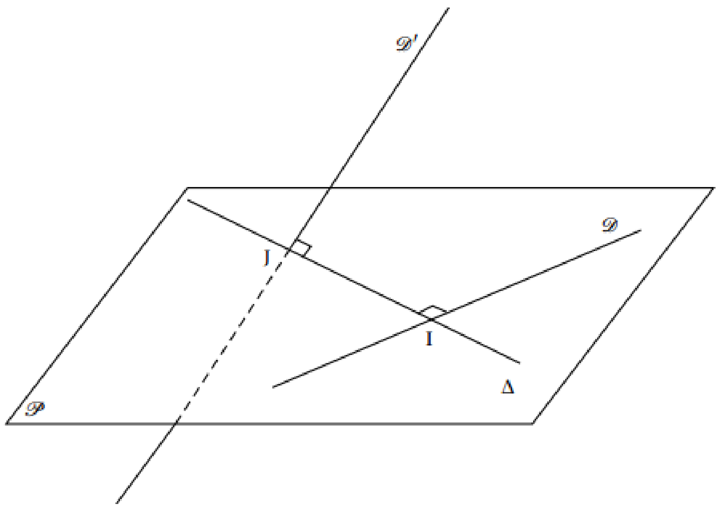
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ la droite des abscisses et $\mathscr{D}'$, la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -t\\ y &=& 3+3t\\ z &=& 1-t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\vec{w} = b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.
3. **a.** Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathscr{D}$.

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

   c. Justifier que la droite passant par J, de vecteur directeur $\vec{w}$ est sécante à $\mathscr{D}$ en un point I et qu'elle est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

   d. En déduire la distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.



1. La droite $\mathscr{D}'$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\ (-1\ ;\ 3\ ;\ -1)$ lequel n'est manifestement pas colinéaire au vecteur $\vec{\imath}$, vecteur directeur de la droite des abscisses $\mathscr{D}$: donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.
Prouvons à présent qu'elle ne sont pas sécantes.
Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ étant : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& u\\ y &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right., u \in \mathbb{R}$,
on a pour $M(x\,;y\,;\,z)$:

$$M \in \mathscr{D}\cap\mathscr{D}' \iff \text{il existe } (u\,;\,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{lcl} u &=& -t\\ 0 &=& 3+3t\\ 0 &=& 1-t\end{array}\right.$$
$$\iff \text{il existe } (u\,;\,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{lcl} u+t &=& 0\\ t &=& -1\\ t &=& 1\end{array}\right..$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, le système n'a pas de solution et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas sécantes.
Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont donc **non coplanaires**.

2. Le vecteur $\vec{w} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ sera un vecteur directeur de Δ si $\vec{w} \perp \vec{\imath}$ et $\vec{w} \perp \vec{u}$, i.e. si $a = 0$ et $-a+3b-c=$, i.e. encore si $a = 0$ et $c = 3b$.
Prenons $b = 1$. Alors le vecteur $\vec{w} = \vec{\jmath} + 3\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ.

3. **a.** Soit $M(u\,;0\,;0)$ un point de $\mathscr{D}$. On a alors : $-3y+z = -3\times 0+0 = 0$. Donc $M \in \mathscr{P}$ et ceci quel que soit le point M de $\mathscr{D}$.
Donc le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathscr{D}$.

   b. En tant que point de $\mathscr{D}'$ le point J a pour coordonnées $(-t\,;\,3+3t\,;\,1-t)$.
Pour obtenir t exprimons que J appartient au plan $\mathscr{P}$:

$$-3y+z=0 \iff -3(3+3t)+(1-t)=0 \iff -10t = 8 \iff t = -\frac{4}{5}.$$

On en déduit que les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$ sont $\left(\frac{4}{5}\,;\,\frac{3}{5}\,;\,\frac{9}{5}\right)$.

   c. Désignons par Δ_1 la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{w}$. Elle a pour représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{4}{5}\\ y &=& \frac{3}{5}+v\\ z &=& \frac{9}{5}+3v\end{array}\right., v \in \mathbb{R}.$$

Étudions l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ_1. On a pour $M(x\,;\,y\,;\,z)$:

$$M \in \mathcal{D} \cap \Delta_1 \iff \text{il existe } (u;v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} u = \frac{4}{5} \\ 0 = \frac{3}{5} + v \\ 0 = \frac{9}{5} + 3v \end{cases}$$

$$\iff \text{il existe } (u\,;\,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} u = \frac{4}{5} \\ v = -\frac{3}{5} \\ v = -\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Donc la droite Δ_1 est sécante à $\mathcal{D}$ en un point I de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\,;\,0\,;\,0\right)$.

Montrons que Δ_1 c'est Δ.
La droite Δ_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}$, donc elle est parallèle à Δ, donc elle est orthogonale à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.
D'autre part elle rencontre $\mathcal{D}$ en I et $\mathcal{D}'$ en J.
Donc Δ_1 est une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Enfin, d'après **1.** $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites non coplanaires, et on a admis qu'il existe dans ce cas une unique droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Donc Δ_1 est bien la **perpendiculaire commune** Δ à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

d. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ ayant pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{3}{5}\,;\,\frac{9}{5}\right)$, on en déduit que la distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$ est : $d(\mathcal{D}\,;\,\mathcal{D}') = \mathrm{IJ} = \frac{3}{5} \times \sqrt{0^2+1^2+3^2} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

???? 2010

Exercice 3 **5 points**

Enseignement obligatoire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :
- les points A(1 ; 1 ; 1) et B(3 ; 2 ; 0) ;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$
2. Déterminer une équation de la sphère (S).
3. **a.** Calculer la distance du point A au plan (Q).
   En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).
   b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?
4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées $(0\,;\,2;\,-1)$.
   a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.
   b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
   $$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$
   c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)
   d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
   L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

<u>Exemple</u> :

Soit P_1, P_2 et P_3 les plans respectivement d'équation $x + y - z = 4$, $3x - y + z = 0$ et $-2x + 3y - 3z = 7$.

Considérons l'intersection des deux plans P_1 et P_2.

Ces plans ont pout vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans se coupent selon une droite dont on va chercher les équations paramétriques. En posant t=z on a :

$$M(x,y,z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 3x - y + z = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 + t \\ 3x - y = 0 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 + t \\ 4x = 4 \\ z = t \end{cases} \quad (l_2 + l_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y = 4 + t \\ x = 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}$$

Donc les plans P_1 et P_2 se coupent selon une droite (D) passant par le point $A(1;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Le troisième plan a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\overrightarrow{n_3} = 0 + 3 - 3 = 0$ donc la droite (D) est parallèle au troisième plan.

Il nous faut déterminer si elle est parallèle et confondue ou parallèle et disjointe.

Pour le point A : $-2x + 3y - 3z = -2 \times 1 + 3 \times 3 - 3 \times 0 = 7$ donc A est bien sur le plan P_3 donc tous les points de (D) sont sur les trois plans.

(D) est l'intersection des trois plans.

Exemple 2 :

Soit P_1, P_2 et P_3 les plans respectivement d'équation :

$x + 2y - 1 = 0, \;\; x - y + z = 0$ et $x - y = 1$

Considérons l'intersection des deux plans P_1 et P_2.

Ces plans ont pout vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans se coupent selon une droite dont on va chercher les équations paramétriques. En posant t=z on a :

$$M(x,y,z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 0 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3y = -t - 1 \quad (l_2 - l_1) \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t \\ y = \frac{t}{3} + \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

Donc les plans P_1 et P_2 se coupent selon une droite (D) passant par le point $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$

Le troisième plan a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\overrightarrow{n_3} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 1$ donc la droite (D) n'est parallèle au troisième plan, elle le coupera donc en un point que nous nommerons M.

Vu que l'on ne nous demande pas les coordonnées de ce point on pourrait s'arrêter là. Mais pour la beauté du geste, continuons !

Cherchons la valeur du paramètre t pour laquelle le point de D sera dans le plan P_3

$x - y = 1$ donc $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t - \left(\frac{t}{3} + \frac{1}{3}\right) = 1$ donc $t = -1$

Donc $\begin{matrix} x = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t = 1 \\ y = \frac{t}{3} + \frac{1}{3} = 0 \\ z = t = -1 \end{matrix}$

Ainsi le point $M(1;0;-1)$ est le point de concours des trois plans.