Correction

Exercice 1 (nouvelle Calédonie, novembre 2011)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points : A(0 ; 0 ; 2), B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1. a. On a $\overrightarrow{AB}(0\,;\,4\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;\,0\,;\,-2)$.
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent bien un plan P_1.
$A(0;0;2) \in P_1 \iff 2\times 0+0+2\times 2=4$: vrai ;
$B(0;4;0) \in P_1 \iff 2\times 0+4+0\times 2=4$: vrai ;
$C(0;0;2) \in P_1 \iff 2\times 0+0+2\times 2=4$: vrai ;
Une équation du plan (ABC) est donc : $2x+y+2z=4$.
b. On sait que $d(O, (ABC)) = \dfrac{|2\times 0+0+2\times 0-4|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$.

2. a. La droite (BC) étant orthogonale au plan, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à ce plan. Comme $\overrightarrow{BC}(2\,;\,-4\,;\,0)$, on sait qu'une équation du plan cherché est :
$2x-4y=a$, avec $a\in\mathbb{R}$.
Les coordonnées de A vérifient cette équation, soit :
$0=a$.
Une équation du plan est donc $2x-4y=0 \iff x-2y=0$.
b. Le plan (ABC) a un vecteur normal $\vec{u}(2\,;\,1\,;\,2)$ qui n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}(2\,;\,-4\,;\,0)$, vecteur normal à P, donc les plans (ABC) et P sont sécants en Δ. On a :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-2y &=& 0\\ 2x+y+2z &=& 4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2y\\ y &=& y\\ 2x+2z &=& 4-y\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2y\\ y &=& y\\ 2z &=& -2(2y)-y+4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2y\\ y &=& y\\ 2z &=& -5y+4\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2y\\ y &=& y\\ z &=& -\frac{5}{2}y+2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4t\\ y &=& 2t\\ z &=& -5t+2\end{array}\right.$$

La droite (BC) orthogonale à (P) est orthogonale à toute droite de (P), donc en particulier à Δ. Or cette droite appartient au plan ABC : elle contient un sommet A et est perpendiculaire au côté opposé [BC] : c'est donc la hauteur issue de A du triangle ABC.

3. a. Δ' contient le milieu I de [AC] ; I(1 ; 0 ; 1).
Un point $M(x\,;\,y\,;z)$ appartient à la médiane (BI) si et seulement s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BI}$ qui se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-0 &=& t\\ y-4 &=& -4t\\ z-0 &=& 1+t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 4-4t\\ z &=& t\end{array}\right.$$

b. De $\overrightarrow{AC}(2\,;\,0\,;\,-2)$ on déduit $AC^2=2^2+(-2)^2=4+4=8$.
De $\overrightarrow{AB}(0\,;\,4\,;\,-2)$ on déduit $AB^2=4^2+(-2)^2=16+4=20$.
De même de $\overrightarrow{BC}(2\,;\,-4\,;\,0)$ on déduit $BC^2=2^2+(-4)^2=4+16=20$.
$AB^2=BC^2 \Rightarrow AB=BC=2\sqrt{5}$. Le triangle ABC est isocèle en B.
Rem. On peut également montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et par conséquent que Δ' est à la fois hauteur et médiane du triangle ABC qui est donc isocèle.

4. Les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ du point H commun à Δ et à Δ' vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4t &=& t'\\ 2t &=& 4-4t'\\ -5t+2 &=& t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4t &=& t'\\ 2t &=& 4-4(4t)\\ -5t+2 &=& 4t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4t &=& t'\\ 2 &=& 9t\\ 2 &=& 9t\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 4t &=& t'\\ t &=& \frac{2}{9}\\ t &=& \frac{2}{9}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{8}{9} &=& t'\\ t &=& 2\\ t &=& 2\end{array}\right.$$

En utilisant l'une ou l'autre des équations on obtient $H\left(\frac{8}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{8}{9}\right)$.
On a vu que le triangle ABC est isocèle en B. La droite (Δ') médiane issue du sommet principal B est aussi hauteur du triangle ABC.
On a aussi montré que (Δ) est aussi hauteur de ce triangle ABC.
Conclusion : le point H commun à deux hauteurs est l'orthocentre du triangle ABC.

5. Calculons $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{8}{9}\times 0+\frac{4}{9}\times 4+\frac{8}{9}\times(-2) = \frac{16}{9}-\frac{16}{9}=0$.
De même $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{8}{9}\times 2+\frac{4}{9}\times 0+\frac{8}{9}\times(-2) = \frac{16}{9}-\frac{16}{9}=0$.
La droite (OH) orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) est orthogonale à ce plan.
Mais H point de (OH) appartient aussi au plan (ABC) ; conclusion : le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
On calcule $OH^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64+16+64}{81} = \frac{144}{81} \Rightarrow OH = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Réunion juin 2011

1. Il s'agit d'un problème d'incidence entre une droite et un plan dans l'espace. Pour cela on cherche l'ensemble des points d'intersection de la droite (dont on connaît une représentation paramétrique) et du plan (dont on connaît une équation cartésienne). On résout le système

$$\left\{\begin{array}{l} x=-8+2t\\ y=7-t\\ z=6+t\\ 2x+3y-z+4=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-8+2t\\ y=7-t\\ z=6+t\\ 2(-8+2t)+3(7-t)-(6+t)+4=0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -8+2t\\ y &=& 7-t\\ z &=& 6+t\\ 3 &=& 0 \quad \text{Impossible !}\end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution :

$$\boxed{\text{la droite et le plan n'ont aucun point en commun}}$$

2. C'est encore un problème d'incidence, cette fois entre deux plans dans l'espace dont on connaît pour chacun d'eux une équation cartésienne. On résout un système de deux équations linéaires à trois inconnues en choisissant, par exemple, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, comme paramètre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 4y & - & 3z & = & -4 & L_1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -4 & L_2 \\ & & & & z & = & t & L_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & 4y & = & -4+3t & L_1 \\ & - & 5y & = & 4-5t & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & z & = & t & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{4}{5} - t \\ y & = & -\dfrac{4}{5} + t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & t \end{array}\right.$$

On reconnaît une représentation paramétrique

$$\boxed{\text{d'une droite de vecteur directeur } -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}$$

3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est le plan médiateur du segment $[AB]$, c'est-à-dire le plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(-4;2;5)$ et passant par le milieu $I\left(-1;3;-\dfrac{3}{2}\right)$ du segment $[AB]$. On peut alors déterminer une équation cartésienne de ce plan ou bien tester les coordonnées de I en calculant

$$-4x_I + 2y_I + 5z_I = 4 + 6 - \frac{15}{2} = \frac{5}{2}.$$

Finalement, l'ensemble cherché est

$$\boxed{\text{le plan d'équation } \ -4x + 2y + 5z - \frac{5}{2} = 0}$$

1. Étude des fonctions f et g

a. $f(x) = \mathrm{e}x\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}x^2\mathrm{e}^{-x}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, d'où par produit de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

b. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

De même comme pour tout naturel n, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

c. f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle $f'(x) = \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$ qui est positif sur $]-\infty\,;\,1[$ et négatif sur $]1\,;\,+\infty[$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

g produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle $g'(x) = \mathrm{e}\left(2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}x(2-x)$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme $x(1-x)$ qui est négatif sauf entre les racines 0 et 2.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Calcul d'intégrales

a. $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-1} + 1\right] = \mathrm{e} - 1$.

b. On a $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

On pose :

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x^{n+1} & u'(x) & = & n+1x^n \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x} & v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$$

Toutes les fonctions sont continues car dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut donc faire une intégration par parties :

$I_{n+1} = \mathrm{e}\left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 (n+1)x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}[-\mathrm{e}+0] - \mathrm{e}\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$
$-\mathrm{e}\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}(n+1)I_n = -1 + (n+1)I_n = I_{n+1}$.

c. La formule précédente donne pour $n = 0$, $I_1 = -1 + I_0 = -1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e} - 2$.

Pour $n = 1$, $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(\mathrm{e} - 2) = 2\mathrm{e} - 5$.

3. Calcul d'une aire plane

a. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - g(x) = x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = x\mathrm{e}^{1-x}(1-x)$.

Comme $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f(x)$ est celui du trinôme $x(1-x)$, soit négatif sauf entre les racines du trinôme 0 et 1.

Ceci montre que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;\,1[$ et au dessous sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.

b. On vient de voir que sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ $f(x) \geqslant g(x)$, donc l'aire de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ est égale à la différence des intégrales :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = I_1 - I_2 = \mathrm{e} - 2 - (2\mathrm{e} - 5) = 3 - \mathrm{e}.$$

par linéarité de l'intégrale.

4. Étude de l'égalité de deux aires

a. On a $S_a = \mathscr{A} \iff 3 - e^{1-a}\left(a^2 + a + 1\right) = 3 - e \iff -e^{1-a}\left(a^2 + a + 1\right) = -e \iff e \times e^{-a}\left(a^2 + a + 1\right) = e \iff e^{-a}\left(a^2 + a + 1\right) = 1 \iff$ $a^2 + a + 1 = e^a$.

b. Il reste à résoudre l'équation $e^x = x^2 + x + 1$ équivalente à $e^x - x^2 - x - 1 = 0$ sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Si on pose, pour tout x réel : $h(x) = e^x - x^2 - x - 1$, cela revient à chercher un zéro de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle

$h'(x) = e^x - 2x - 1$ qui elle-même est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$h''(x) = e^x - 2$

On a $h''(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$

Donc $h''(x) > 0 \iff e^x - 2 > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$.

h' est continue et strictement croissante sur $[\ln 2 ; +\infty[$ et à fortiori sur $[1 ; +\infty[$ puisque $\ln 2 \approx 0,69 < 1$.

On a $h'(1) = e^1 - 2 - 1 = e - 3 < 0$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} h'(x) = +\infty$ (limite obtenue en factorisant e^x.)

Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α, $1 < \alpha$ tel que $h'(\alpha) = 0$.

On en déduit que h est strictement négative sur $]1 ; \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha ; +\infty[$.

h est donc strictement décroissante sur $]1 ; \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$.

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} h(x) = e - 3 \approx -0,28$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Ainsi h est strictement négative sur $]1 ; \alpha[$.

Enfin, h étant continue est strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$, il existe $\beta \in]\alpha ; +\infty[$, unique, tel que $h(\beta) = 0$.

Avec une table de valeurs ou le solveur de la calculatrice on trouve aisément : $\alpha \approx 1,26$ et $\beta \approx 1,79$. (Voir la figure ci-dessous)

Bonus Antille guyane

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :

$A(-1 ; 2 ; 1)$, $B(1 ; -6 ; -1)$ et $C(2 ; 2 ; 2)$.

1. **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.

a. Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

b. Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3 ; 1 ; 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2 ; -1 ; 1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 + t \\ y & = & -3 + 2t \\ z & = & t, \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que le point I appartient à la droite D.

b. Montrer que le point I appartient à la sphère S.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.