Devoir surveillé : géométrie dans l'espace et Intégrales

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$

On considère les points : $A(0;0;2)$, $B(0;4;0)$ et $C(2;0;0)$.

1. **a.** Vérifier que (ABC) est un plan et qu'une de ses équations est : $2x+y+2z=4$

b. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

2. **a.** Déterminer une équation du plan (P) passant par A et orthogonal à (BC)

b. Soit (Δ) la droite d'intersection du plan (P) et du plan (ABC).

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC.

3. **a.** Soit (Δ') la médiane issue de B du triangle ABC.

Montrer qu'une équation paramétrique de (Δ') est : $\begin{cases} x=t \\ y=4-4t \\ z=t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que le triangle ABC est isocèle.

4. Soit H le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ').

Montrer que H a pour coordonnées$\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Exercice 2

Pour chacune des trois questions une réponse est juste les autres fausses, indiquez laquelle.

Toute réponse juste rapporte 2 points, toute fausse fait perdre un point et une absence de réponse ne rapporte ni ne fait perdre de point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$

On désigne par (P) le plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ et, par A et B les points de coordonnées respectives $(1;2;-4)$ et $(-3;4;1)$

1. soit (D) la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-8+2t \\ y=7-t \\ z=6+t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

   a) Le plan (P) et la droite (D) sont sécants
   b) Le plan (P) et la droite (D) n'ont aucun point en commun.
   c) La droite (D) est incluse dans le plan (P)
   d) aucune des trois affirmations précédentes n'est vraie.

2. On note (P') le plan d'équation $x+4y-3z+4=0$.

   a) les plans (P)et (P') sont parallèles et distincts.
   b) Les plans (P)et (P') sont confondus.
   c) les plans (P)et (P') sont sécants selon une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$
   d) les plans (P)et (P') sont sécants selon une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

3) L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :

   a) une droite passant par le point C de coordonnées $\left(-1;3;-\frac{1}{2}\right)$
   b) une sphère de rayon $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
   c) un plan d'équation $-4x+2y+5z-\frac{5}{2}=0$
   d) un plan d'équation $-4x+2y+5z+\frac{5}{2}=0$

Exercice 3

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = x\, e^{1-x}$ et $g(x) = x^2 e^{1-x}$
Les courbes représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$seront notées C_f et C_g.

1) **Calcul d'intégrales**

Pour tout entier n, on définit l'intégrale I_n par :
$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx$ et si $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$
a) calculer la valeur exacte de I_0.
b) à l'aide d'une intégration par partie, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

En déduire la valeur exacte de I_1 et de I_2.

2) **Calcul d'une aire plane**

a. Etudier la position relative des courbes C_f et C_g
b. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre C_f et C_g et d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
En exprimant $\mathcal{A}$ comme la différence entre deux aires que l'on précisera , montrer que $\mathcal{A} = 3 - e$

3) **Etude de l'égalité entre deux aires**

Soit a un réel strictement supérieur à 1.
On désigne par $S(a)$ l'aire exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre C_f et C_g et d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.
On admet que $S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1)$
L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle les aires $\mathcal{A}$ et $S(a)$ sont égales.

a. Démontrer que l'équation $\mathcal{A} = S(a)$ est équivalente à l'équation $e^a = a^2 + a + 1$
b. Conclure quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.