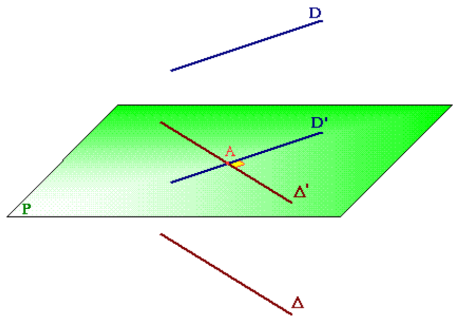
I. Fondamentaux de géométrie dans l'espace :

1) bases :

Voir cours de 2^{nde} sur dimension-k.com rubrique 2^{nde}



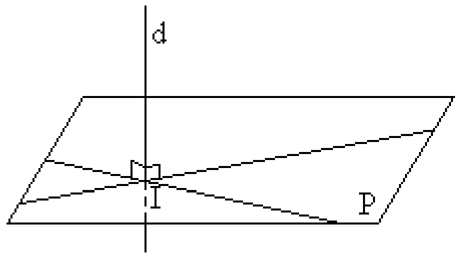
2) L'orthogonalité :

a) Orthogonalité de droites

Définition :
Dire que deux droites D et Δ (non nécessairement coplanaires) sont **orthogonales** signifie que les parallèles à D' et Δ' menées par un point A quelconque sont perpendiculaires.

Conséquence immédiate :
Si deux droites sont parallèles alors toute troisième orthogonale à l'une sera orthogonale à l'autre.

b) Orthogonalité d'une droite et d'un plan



Définition :
I est le point d'intersection d'une droite d et d'un plan P.
On dit que la droite d et le plan P sont **orthogonaux** si d est perpendiculaire à deux droites de P passant par I.

Propriété :
Si une droite est orthogonale à un plan alors elle sera orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriétés :
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles (démonstration en utilisant l'absurde).
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Propriétés :
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles (démonstration en utilisant l'absurde).

II. Géométrie vectorielle dans l'espace :

1) Plan définit par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Défintion : caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires
Soit O un point de l'espace , $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non colinéaires.
On nomme I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$
Le plan (OIJ) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$, avec x et y deux réels.

2) Vecteurs coplanaires

Définition
Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan.
Cela signifie dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires qu'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Exercice :
Pourquoi si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont nécessairement coplanaires

Théorème
Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Théorème :
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Alors il existe x, y et z un triplet unique de réels tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$

3) Repérage dans l'espace

Définition
Si $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires et O un point fixe alors $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est un repère de l'espace.
Dans ces conditions pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Le triplet est les coordonnées du point M dans le repère, et plus particulièrement x, y et z sont respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote du point M.

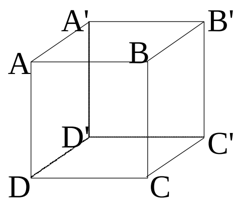
Bien des propriétés valables dans le plans sont adaptées à l'espace en incluant la troisième coordonnée par exemple :
Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et I le milieu de [AB] a pour coordonnées $I(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2})$

III. Produit scalaire dans l'espace :

1) Définition:

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace, de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On peut alors calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC) :
$\vec{u}.\vec{v}$ produit scalaire de l'espace est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan (ABC).

Exemple: Dans un cube $ABCDA'B'C'D'$ d'arête a, calculer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC'}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$.
Remarque : Pour calculer des produits scalaires de l'espace, il est souvent utile de décomposer les vecteurs grâce à la relation de Chasles, en faisant intervenir des vecteurs orthogonaux.



2) Propriétés :

Toutes les propriétés vues dans le II. 1) pour le produit scalaire du plan s'appliquent au produit scalaire de l'espace, en choisissant des points et des vecteurs coplanaires.

Précision adaptée à l'espace :

Expression analytique : Dans un repère orthonormé,
si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} =$ ……………………….En particulier $\|\vec{u}\| =$…………………………
de même : Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors $\|\overrightarrow{AB}\| =$…………………………

Définition :
Un repère est orthonormé si ses trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si ils sont tous trois de norme 1.

IV. Application du produit scalaire dans l'espace :

1) Equation d'une sphère dans un repère orthonormé :

Théorème : Dans un repère orthonormé, si Γ est la sphère de centre $A(x_A; y_A; z_A)$ et de rayon R, alors une équation de Γ est ……………………………………………

2) Plan orthogonal à un vecteur :

Définition : Un plan est dit **orthogonal** à un vecteur non nul si ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.

Remarque fondamentale : un vecteur non nul $\vec{n}$ est orthogonal à un plan (ABC) ssi il est orthogonal à

……….

Propriété :
– Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. Le plan (P) passant par A et orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
– Dans un repère orthonormé, si a , b et c sont trois réels non tous nuls, on a équivalence entre :
- P est un plan dont une équation est $\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z + d = 0$, où $d \in \mathbb{R}$
- $\vec{n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

Démonstration :

Exemple : Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace on donne $A(1\,;1\,;1)$ et $B(3\,;-1\,;-3)$. Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$.

3) Projection orthogonale dans l'espace :

D'un point sur une droite :

D'un point sur un plan :

Propriété : *Distance d'un point à un plan dans l'espace* :
Soit P un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé et $M_0(x_0; y_0; z_0)$ un point de l'espace. La distance du point M_0 au plan P est égale à ………………………………………………………………..

4) Inéquations caractérisant un demi-espace :

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ qui vérifient $ax + by + cz + d \geq 0$ est un demi-espace délimité par le plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

L'autre demi-espace de **frontière** P est l'ensemble des points qui vérifient $ax + by + cz + d \leq 0$.

Exemple : Reprendre l'exemple 5 et déterminer l'inéquation caractérisant le demi-espace de frontière le plan médiateur de $[AB]$ et qui contient B.

V. Système de représentation paramétrique d'une droite :

Théorème : Soit d la droite passant par le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ non nul.

Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à d ssi il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$.

t est appelé «*paramètre*». Lorsque t décrit tous les réels, le point M décrit tous les points de la droite d. Ce système d'équations paramétriques n'est pas unique : il dépend du choix du point A et de celui du vecteur $\vec{u}$.

Démonstration :

Exemple : Dans un repère, soit *d* la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

Soient $A(3\ ; 5\ ; 2)$ $B(1\ ; 6\ ; 0)$ et $C(3\ ; 0\ ; -2)$ trois points de l'espace. Le point A appartient-il à *d* ?
La droite (BC) est-elle parallèle à *d* ? Donner un système d'équations paramétriques de la droite (BC).

Récapitulation :

On peut traduire l'appartenance d'un point à une droite de différentes façons :

- Traduction **vectorielle** : M appartient à la droite (AB) ssi ……………………………………………………………………
- Traduction **analytique** : M appartient à la droite (AB) ssi ……………………………………………………………………

……

5) Intersection de deux plans de l'espace:

Propriété :	Schéma :
Deux plans distincts P et P' sont : **• <u>parallèles</u> si et seulement si leurs vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires** **Sinon ils sont :** **• <u>sécants</u> et dans ce cas leur intersection est une droite.** *Avec les équations dans un repère cela revient à :* Propriété 7 : Les plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $ax + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles ssi (a, b, c) est proportionnel à (a', b', c'). Sinon, leur intersection est la droite représentée par le **système d'équations cartésiennes :** $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$	Plans parallèles : Plans sécants :

Remarque : il faut savoir passer du système d'équations cartésiennes aux équations paramétriques de droite grâce à la méthode de l'exemple 3 à connaitre :

Exemple : Dans un repère, on donne les plans d'équations $x + y - z = 1$ et $3x + 2y + z = 4$. Déterminer si ces plans sont sécants, et si oui déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite intersection.

6) Intersection d'un plan et d'une droite de l'espace:

Propriété :
Soit d une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$,
et P un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux : alors d est parallèle à P et :
  - soit d est incluse dans P (si $A \in P$),
  - soit d et P n'ont aucun point commun (si $A \notin P$)
- Sinon si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux : alors d et P sont sécants en un seul point.

Avec les équations dans un repère cela revient à :

Propriété 9 : Le plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et la droite d d'équations paramétriques $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, sont sécants si et seulement si le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et de $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ est non nul : $\boldsymbol{a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0}$.

Schéma :

Plan et droite parallèles :

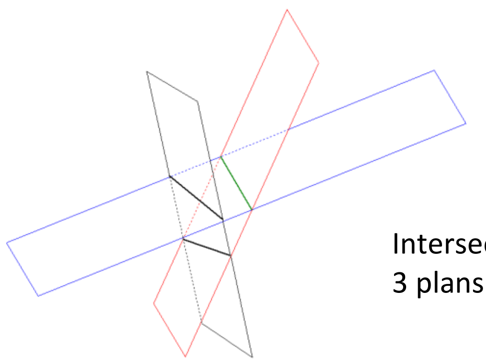
Plan et droite sécants :

Exemple : Déterminer l'intersection du plan P d'équation $2x + y - 5z = 1$ et de la droite (AB) où $A(1\,;-5\,;0)$ et $B(4\,;1\,;3)$.

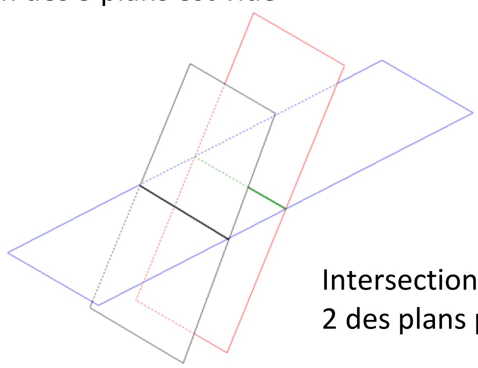
7) Intersection de trois plans de l'espace :

L'intersection de trois plans de l'espace se ramène à la résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues comportant les 3 équations des plans, du type : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$. Un tel système peut avoir :

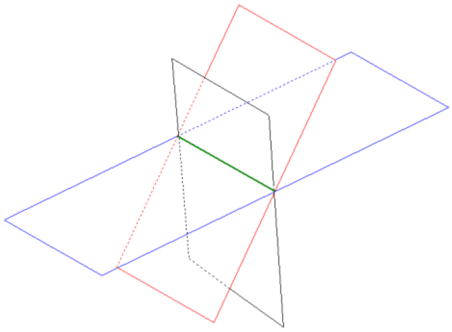
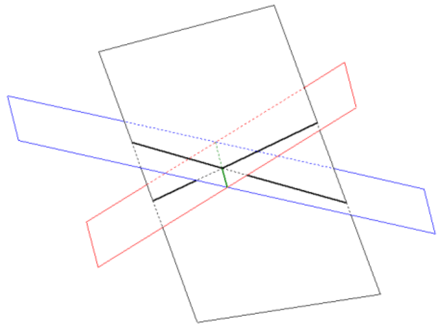
Aucune solution : l'intersection des 3 plans est vide



Intersection vide avec 3 plans quelconques



Intersection vide avec 2 des plans parallèles

Une droite solution	Un point solution
	

<u>Exemple</u> : Déterminer l'intersection des plans $x+y-z=4$, $3x-y+z=0$ et $-2x+3y-3z=7$.

<u>Exemple</u> : Vérifier que les plans d'équations $x+2y-1=0$, $x-y+z=0$ et $x-y=1$ sont concourants en un point.