Séance de TD du 5/4/2013

Exercice 91P316

1)$(D)\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-1+t \\ z=2-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ donc cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ et passe par $A(-3;-1;2)$ (on a pris $t=0$)

$(D')\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1+t' \\ z=-4-3t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$ donc cette droite a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ donc les deux droites sont parallèles.

Vérifions que (D') passe bien par A

$A\in(D')\Longrightarrow\begin{cases} -3=1+2t' \\ -1=1+t' \\ 2=-4-3t' \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t'=-2 \\ t'=-2 \\ t'=-2 \end{cases}$ utilisons les équations paramétriques de (D') avec $t'=-2$, on obtient bien les coordonnées de A , donc ce point est bien commun aux deux droites parallèles (D) et (D') , elles seront donc confondues.

Exercice 92P316

1)$(D)\begin{cases} x=-3+2t \\ y=-1+t \\ z=2-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ donc cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ et passe par $A(-3;-1;2)$ (on a pris $t=0$)

$(D')\begin{cases} x=-1+2t' \\ y=-t' \\ z=-1-t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$ donc cette droite a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, qui n'est pas colinéaire avec $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ donc les deux droites ne sont pas parallèles.

Cherchons un point $M(x,y,z)$ commun aux deux droites.

$M\in(D')\cap(D)\Longrightarrow\begin{cases} -3+2t=-1+2t' \\ -1+t=-t' \\ 2-3t=-1-t' \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -3+2t=-1+2(1-t) \\ t'=1-t \\ 2-3t=-1-(1-t) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4t=4 \\ t'=1-t \\ -4t=-4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t=1 \\ t'=0 \\ t=1 \end{cases}$

Si on utilise le paramètre $t=1$ dans les équations de (D) et $t'=0$ dans celles de (D') on obtient bien le même point $M(-1;0;-1)$.

Les deux droites sont non parallèles et ont un point en commun M, elles sont donc sécantes en ce point.

Exercice 93

1) Un coup d'œil est suffisant pour ce rendre compte que les deux droites ont des vecteurs directeurs colinéaires et donc on peut en déduire qu'elles sont parallèles, et donc qu'elles sont coplanaires.

Exercice 100P317

1) Pour montrer que deux plans sont perpendiculaires il faut et suffit que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

(P) : $x+2y-z+1=0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ (P') : $-x+y+z=0$ donc $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-1+2-1=0$ les deux plans sont donc orthogonaux et donc sécants selon une droite

2) Vérifions que $(D)\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+t \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ est bien incluse dans (P)

Soit M(x ;y ;z) point de (D) montrons qu'il est aussi dans (P)

$x+2y-z+1=-\frac{1}{3}+t+2\left(-\frac{1}{3}\right)-(t)+1=0$ donc M est dans (P)

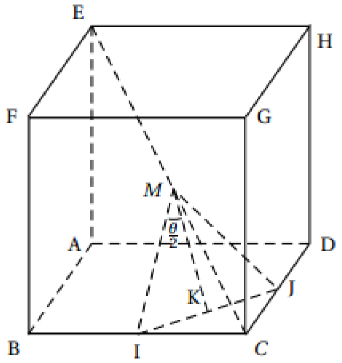
montrons qu'il est aussi dans (P')

$-x+y+z=-\left(-\frac{1}{3}+t\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+t=0$ donc M est dans (P')

Donc M est dans l'intersection des deux plan, ceci étant valable pour n'importe quel point de la droite (D) on peut dire qu'elle est incluse dans cette intersection qui est une droite donc (D) est la droite d'intersection.

Exercice 104P318 (bac 2011 centre étranger session de Juin)

Corrigez l'énoncé de la 3a « lorsque $sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal »



1. **a.** C(1 ; 1 ; 0) ; E(0 ; 0 ; 1) ; I$\left(1 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$; J$\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$.

   b. $M(x ; y ; z) \in (\text{CE}) \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{\text{CE}} \iff \begin{cases} x-1 & = & -\alpha \\ y-1 & = & -\alpha \\ z-0 & = & \alpha \end{cases}$

   $\iff \begin{cases} x & = & 1-\alpha \\ y & = & 1-\alpha \\ z & = & \alpha \end{cases}$ Finalement :

   $M(x ; y ; z) \in [\text{CE}] \iff$ il existe $\alpha \in [0 ; 1]$ tel que : $\begin{cases} x & = & 1-\alpha \\ y & = & 1-\alpha \\ z & = & \alpha \end{cases}$

   Pour $\alpha = 0$, le point est en C, pour $\alpha = 1$ le point est en E.

2. **a.** Un point $M(x ; y ; z)$ appartient au plan médiateur de [IJ] s'il est équidistant de I et de J, c'est-à-dire si $MI = MJ$ ou $MI^2 = MJ^2 \iff (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 \iff x^2+1-2x+y^2+\frac{1}{4}-y+z^2 = x^2+\frac{1}{4}-x+y^2+1-2y+z^2 \iff -x+y=0 \iff y=x$ équation du plan médiateur.

   Il est évident que C et E ont leurs coordonnées qui vérifient cette équation.

   b. Les coordonnées de M vérifient pour tout $t \in [0 ; 1]$ l'équation du plan médiateur donc $MI = MJ$ et le triangle MIJ est isocèle en M.

   c. On a $\text{I}M^2 = (1-t-1)^2+\left(1-t-\frac{1}{2}\right)^2+(t-0)^2 = t^2+\frac{1}{4}+t^2-t+t^2 = 3t^2-t+\frac{1}{4}$.

3. **a.** Sur l'intervalle $[0 \ ; \pi]$ la fonction sinus est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ avec un maximum en $\frac{\pi}{2}$. Donc la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

   b. Dans le triangle IMJ, soit K le milieu de [IJ]. Le triangle étant isocèle en M la droite (MK)est médiane et donc aussi hauteur. Le triangle IMK est donc rectangle en K et par définition $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\text{IK}}{MI}$. Par définition de la fonction inverse le sinus est maximal quand le dénominateur IM est minimal.

   c. On a $f(t) = 3\left(t^2 - \frac{t}{3} + \frac{1}{12}\right) = 3\left[\left(t-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} + \frac{1}{12}\right]$
   $= 3\left[\left(t-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{18}\right]$.

   La forme canonique du trinôme montre que le minimum de la fonction est obtenu pour $x = \frac{1}{6}$ et que ce minimum est égal à $f\left(\frac{1}{6}\right) = 3 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$.

   d. On a vu (question 2. c.) que I$M^2 = f(t)$ et que le minimum de IM^2, donc de IM correspond au maximum de l'angle $\widehat{\text{I}MJ}$. Donc le point M_0 de [EC] correspondant à la valeur du paramètre $t_0 = \frac{1}{6}$ est le point unique correspondant à la valeur maximale de l'angle $\widehat{\text{I}M_0\text{J}}$

   e. Géométriquement, on sait que la distance d'un point M à une droite (EC) est obtenue avec le projeté orthogonal du point M sur la droite (EC).
   Donc le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].