I. Equation différentielle du type $y' + ay = b$.

Figure 1 - Condensateur de capacité $C = 0,1\ \mu F$

Activité 1 : La charge d'un condensateur (Circuit RC).

Un condensateur présent dans tout appareil électrique et électronique possède la propriété de conserver des charge électrique. Un condensateur est caractérisé par sa **capacité** C exprimé en Farad (F).

Dans cet exercice on s'intéresse à un circuit dit RC composé d'une résistance R et d'un condensateur C, on cherche à modéliser fonction suivie par la tension aux bornes du condensateur.

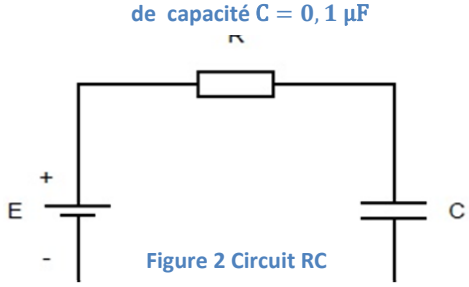


Figure 2 Circuit RC

PARTIE EXPERIMENTALE

Si on relève la tension aux bornes d'un condensateur lors de sa connexion à un générateur, on observe une courbe croissante se rapprochant de la tension du générateur. Qui ressemble à la courbe tracé ci-contre.

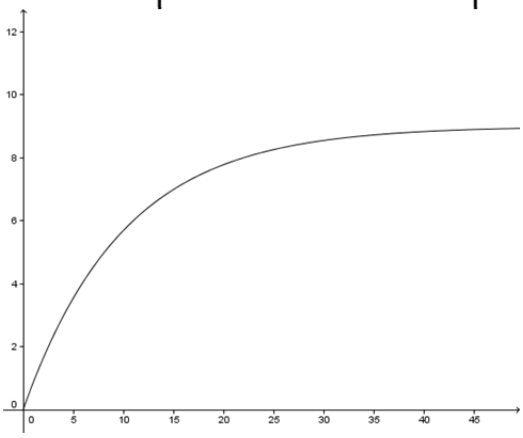


Figure 3 Courbe représentant la charge d'un condensateur

PARTIE MATHEMATIQUE

La capacité d'un condensateur vérifie la relation :

$$\boxed{i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t)\,.}$$

- $i(t)$ est l'intensité du courant qui traverse le condensateur à l'instant t, exprimée en ampères (A).
- u est la tension aux bornes du condensateur ; exprimée en volts (V).
- $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t)$ représente la dérivée de la tension par rapport au temps. On l'exprime en en Volts par seconde$(V/s \text{ ou } V.s^{-1})$. C'est la variation de la tension.

La loi **d'additivité des tensions** pour un circuit en série donne que la somme des tensions aux bornes des dipôles montés en série est égale à la tension au borne du générateur.

On rappelle la relation $\boxed{u_R = Ri}$.

On appelle u_C la tension au borne du condensateur, u_R la tension au borne de la résistance et E celle tension au borne du générateur.

PARTIE A

1. En utilisant la loi d'additivité des tensions écrire une relation entre u_C, u_R et E.

2. En utilisant l'ensemble des données de l'exercice, montrer que la fonction $u_C(t)$ vérifie la relation :

$$E = u_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t).$$

Cette relation est appelé équation différentielle, c'est une équation qui relie une fonction et ces dérivées (dérivée, dérivée seconde, etc…). Celle-ci est appelé équation différentielle du premier ordre car elle relie la fonction u_C avec la fonction dérivée de u_C.

Pour la suite de l'exercice, on considère le cas où les composants montés ont pour unité

$$R = 100\ \Omega, \qquad C = 1\ 000\ \mu\mathrm{F}$$

PARTIE B

Dans cette partie, on considère que le générateur est branché au système à l'instant $t = 0$ et que la tension aux bornes du générateur est de $E = 9\ \mathrm{V}$.

1. Réécrire l'équation différentielle sous les conditions présentées.
   Cette équation s'appelle équation avec second membre.
2. Au regard du théorème, donner la solution de l'équation différentielle précédente.
3. En utilisant la fait qu'à l'instant $t = 0$ la tension du condensateur est nulle, donner l'expression de la fonction $u_C(t)$ suivi par la charge du condensateur.

PARTIE C

Dans cette partie, on considère que le condensateur est chargé et que le générateur est débranché ($E = 0\ \mathrm{V}$).

1. Réécrire l'équation différentielle sous la condition présentée.
   Cette équation s'appelle équation homogène.
2. Au regard du théorème donner les solutions $u_C(t)$ de l'équation différentielle précédente.
   Représenter l'ensemble de ces fonctions à l'aide d'un logiciel graphique en faisant varier λ dans l'intervalle $[0\,;10]$.
3. En utilisant le fait que lorsque le générateur n'est pas branché, la tension est nulle ($u_C(0) = 0$) déterminer la valeur de λ et en déduire la solution de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.

PARTIE D

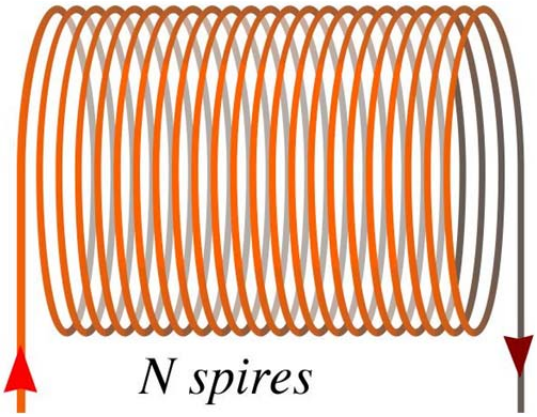
Dans cette partie, nous allons étudier la fonction solution de notre problème.
Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 9(1 - \mathrm{e}^{-0{,}1\,t}).$$

1. Déterminer la limite de f quand t tend vers $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction.

Activité 2 : Le fonctionnement d'une bobine (Circuit RL).

Une bobine en électricité, ou en électronique est un composant constituée d'un enroulement de fil conducteur le plus souvent en cuivre. Sa propriété principale est de s'opposer à la variation du courant et donc de protéger les appareils électriques des fluctuations éventuelles de tensions et d'intensités. Elles sont très présentes dans tous les transformateurs et sur toutes les cartes électroniques.

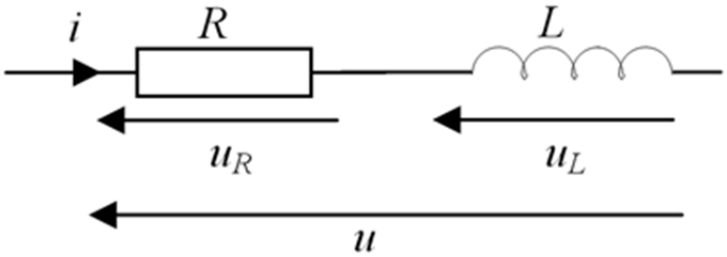


Les bobines sont caractérisées par leurs inductances notées L et ayant pour unités le henry (H).

Lorsqu'une bobine est dans un circuit électrique, la tension aux bornes de celle-ci vérifie la relation :

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Dans cet exercice, nous considérons le circuit RL schématisé ci-contre, composé d'un générateur de tension E en volt, d'une résistance R en ohms et d'une bobine d'inductance L en henry.



1. En utilisant la loi d'additivité des tensions écrire une relation entre u_L, u_R et E.
2. En utilisant les autres données de l'exercice, montrer que la fonction $i(t)$ vérifie la relation :

$$E = R \cdot i(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t).$$

Pour la suite de l'exercice, on considère le cas où $R = 100\ \Omega$, $L = 10\ H$.

3. Déterminer les fonctions $i(t)$ solutions de l'équation différentielle de la question précédente.
4. Etudier cette ensemble de fonction (Variation, limite quand t tend vers $+\infty$).