Chap – Equation différentielle

I. Equation différentielle du type $y' + a\,y = b$.

a. Cas de l'équation homogène $\boldsymbol{y' + ay = 0}$

Théorème :

Soit l'équation différentielle $y' + ay = 0$, où a est un nombre réel et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme : $x \to \lambda\, e^{-ax}$ où λ est une constante réelle.

Exemple (première partie)

On a un circuit constitué d'un interrupteur, d'une résistance d'impédance R et d'un condensateur de capacité C

Le but est de déterminer la tension U aux bornes du condensateur quand on referme l'interrupteur.

Si $U(t)$ est la tension aux bornes d'un condensateur à l'instant t, alors $i(t)$ l'intensité en sortant sera donnée par la formule $i(t) = CU'(t)$.

Réponse : Quand on ferme le circuit la loi des mailles donne RI+U=0 et donc :

$RCU'(t) + U(t) = 0$ ou encore $U'(t) + \frac{1}{RC}U(t) = 0$ et donc la fonction U sera de la forme $U(t) = \lambda e^{-\frac{1}{RC}t}$

b. Cas de l'équation $\boldsymbol{y' + ay = b}$

Théorème :

Soit l'équation différentielle $y' + ay = b$, où a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, et où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \to \lambda\, e^{-ax} + \frac{b}{a}$ où λ est une constante réelle.

Exemple (deuxième partie)

Même question quand on rajoute au circuit un générateur donnant un courant de tension constante U_G.

Réponse : $RCU'(t) + U(t) = U_G \Leftrightarrow U'(t) + \frac{1}{RC}U(t) = \frac{U_G}{RC}$ donc la fonction U sera de la forme :

$U(t) = \lambda e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{\frac{U_G}{RC}}{\frac{1}{RC}} = \lambda e^{-\frac{1}{RC}t} + U_G$

Théorème :

Soit x_0 et y_0 deux réels. L'équation différentielle $y' + ay = b$, où a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, admet une unique solution f vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$.

Exemple (troisième partie)

Même question si l'on sait maintenant qu'à l'instant $t = 0$ la tension aux bornes du condensateur est U_0

Réponse : de l'énoncé on déduit $U_0 = \lambda e^{-\frac{1}{RC}0} + U_G \Leftrightarrow U_0 = \lambda + U_G$ ou encore : $\lambda = U_0 - U_G$ ainsi

$U(t) = (U_0 - U_G)e^{-\frac{1}{RC}t} + U_G$ si l'énoncé nous donne U_0, U_G, R et C on maitrise parfaitement la fonction !

II. Equation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$

a. Cas de l'équation $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$

Théorème :

Soit l'équation différentielle $y'' + \omega 2y = 0$, où ω est un nombre réel non nul et où y est une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

$x \mapsto \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$,

où λ et μ sont des constantes réelles.

b. Solution vérifiant des conditions initiales

Théorème :

Soient x_0 et y_0 et y_1 trois réels. L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, où ω est un nombre réel non nul, admet une unique solution f vérifiant les conditions : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$