Chap 3 – Primitives

Dans tout ce chapitre, f sera une fonction définie sur I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $h > 0$ tel que $a + h \in I$, et C_f est la courbe représentative de f.

I. Primitive d'une fonction :

Introduction : Donner une fonction F dont la dérivée est $f(x) = x^2$, puis toutes les fonctions dont la dérivée est $f(x) = x^2$.

1. définition :

Définition 1: On appelle **primitive de la fonction *f*** sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f : on a donc $F' = f$.

Propriété 1:
a) Si f admet une primitive F sur I, alors toute fonction G où G(x) = F(x) + k , k étant un réel, est aussi une primitive de f .
b) De plus si H est une autre primitive de f , alors il existe k tel que H = F + k.
c) Conséquence : f admet en fait une infinité de primitives sur I : toutes les fonctions F + k où k est une constante quelconque. Une seule de ces primitives s'annule en une valeur x_0 de I.

*On démontrera plus tard que **toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.***

2. Primitives « de base » à connaître :

Fonction f	Primitives F	Ensemble de définition
a (constante)		
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$		
$\frac{1}{x^n} \quad n \geq 2$		
$1/x^2$		
$1/\sqrt{x}$		
$1/x$		
e^x		
$\cos x$		
$\sin x$		
$f + g$		
αf, α constante		

Exercice 2 : déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{2}{x} - 5x^4$

$g(x) = 3\sin x$

$h(x) = 2e^x - x^6 + \dfrac{1}{3x}$

3. Primitives de fonctions composées :

Fonction f	Une primitive F
$u'u^n, n \in \mathbb{Z}$	
$\dfrac{u'}{u}$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	

Fonction f	Une primitive F
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	
$u'e^u$	
$u' \cos u$	
$u' \sin u$	
$u' \times g \circ u$	

Remarques *:*
• u et f sont continues.
• Attention il peut y avoir des conditions à vérifier sur u ($u \neq 0$, $u > 0$…)
• **Il n'y a pas de formules de primitives pour uv et $\frac{u}{v}$**. On ne peut pas déterminer les primitives dans ce cas.

4. Comment trouver une primitive :

On cherche dans le tableau la formule qui s'approche le plus, et on <u>ajuste</u> si nécessaire avec un coefficient <u>constant</u>.

Exemple avec une primitive de $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$:

<u>Exemple 3</u> : Déterminer une primitive de :

$f(x) = \frac{2x}{(x^2+3)^5}$, ……………………………………………………………………………………………………

……

$g(x) = e^{x+1}$, ……………………………………………………………………………………………………

……

$h(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$, ……………………………………………………………………………………………………

……

$i(x) = e^{-x}$, ……………………………………………………………………………………………………

……

$j(x) = e^{2x}$ ……………………………………………………………………………………………………

……

$k(x) = x\cos(x^2+5)$, ……………………………………………………………………………………………………

……

$l(x) = x + \frac{x}{(x^2+1)^2}$, ……………………………………………………………………………………………………

$m(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3\, e^{\frac{1}{2}x}$ ……………………………………………………………………………………………………

……

<u>Remarque</u> : *la plupart des fonctions continues, même simples, ne possèdent pas de primitives qui s'écrivent avec des fonctions usuelles. Exemple :* $x \mapsto e^{x^2}$.

Fonction f	Primitives F
a (constante)	
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	
$\frac{1}{x^n} \quad n \geq 2$	
$\dfrac{1}{x^2}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	
$\dfrac{1}{x}$	
e^x	
$\cos x$	
$\sin x$	

Fonction f	Une primitive F
$f + g$	
αf, α constante	
$u'u^n, n \in \mathbb{Z}$	
$\dfrac{u'}{u}$	
$\dfrac{u'}{u^2}$	
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	
$u'e^u$	
$u' \cos u$	
$u' \sin u$	
$u' \times \ g \circ u$	