EXERCICE

Une société fabrique des tubes à essai.
Une étude a montré que la probabilité pour un tube, pris au hasard dans la production, de présenter un défaut est égale à 0,03.
On suppose la production suffisamment importante pour assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise.
Les deux questions suivantes sont indépendantes.
Dans cet exercice, toutes les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.

1. On prélève 10 tubes dans la production. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tubes défectueux dans le prélèvement.
   - **a.** Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,03.
   - **b.** Déterminer la probabilité $P(X = 1)$.
   - **c.** Déterminer la probabilité que, parmi les 10 tubes, un tube au moins présente un défaut.
2. On prélève 300 tubes dans la production. On décide d'approcher la variable aléatoire donnant le nombre de tubes défectueux dans le prélèvement par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 9 et d'écart type 3.
   - **a.** Déterminer la probabilité que le prélèvement contienne entre 6 et 12 tubes défectueux.
   - **b.** Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de tubes défectueux pour un échantillon de taille 300. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près.
   - **c.** Le responsable qualité veut vérifier la production. Pour cela, il prélève un échantillon de 300 tubes. Dans cet échantillon, 14 tubes sont défectueux. Doit-il faire procéder à un réglage des machines ? Justifier votre réponse.

EXERCICE

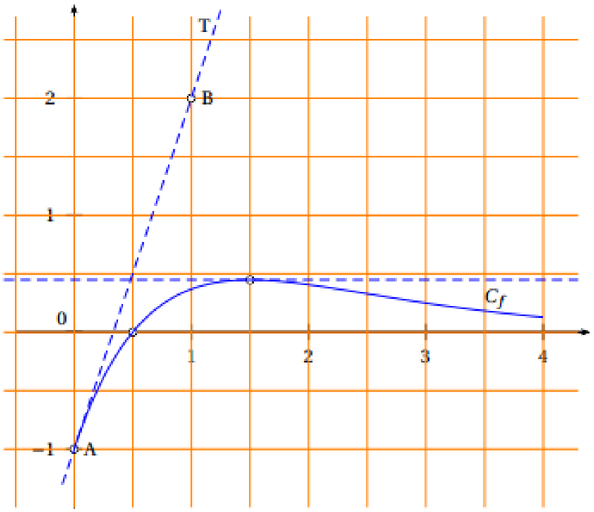
Partie A : Lecture graphique

La courbe C_f tracée ci-dessous est la représentation graphique sur [0 ; 4] d'une fonction f définie sur [0 ; +∞[.
On admet que :

La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en $\frac{1}{2}$.

La tangente T à la courbe C_f au point A $(0\ ,\ -1)$ passe par le point B $(1\ ,\ 2)$.

La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ,\ 4]$.
2. Déterminer les valeurs de $f'(0)$ et de $f'\left(\frac{3}{2}\right)$.

Partie B : Étude de la fonction

On admet que la fonction f est la fonction définie sur [0 ; +∞[par

$$f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
2. La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.
   a. Vérifier que $f'(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; +∞[.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; +∞[.

Partie C : Calcul d'aire

On donne ci-dessous les tableaux de variation et des tableaux de valeurs de trois fonctions dérivables sur [0 ; +∞[: F_1, F_2 et F_3.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$F_1(x)$	3	↘	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	↗	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_1(x)$	3	0	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F_2(x)$	-1	↘	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	↗	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_2(x)$	-1	$\frac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$-4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$-\frac{5}{\mathrm{e}^2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F_3(x)$	$\frac{3}{2}$	↗	$\sqrt{\mathrm{e}}$	↘	$-\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F_3(x)$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\mathrm{e}}$	0	$-\frac{\mathrm{e}^2}{2}$

1. Une de ces fonctions est une primitive de f sur [0 ; +∞[. Laquelle ? Justifier votre choix.
2. À l'aide de cette fonction, calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C_f, les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.