Correction du devoir maison facultatif

Exercice 58P80

1)

x	2,5	3	3,5	4	5	6	7
$f(x)$	-2.5	0	1,17	2	3,33	4,5	5,6

2) a) $f'(x) = 1 - \frac{0-2\times 1}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$

b) on a f' qui est la somme de deux expressions, toutes deux strictement positives sur D_f.

c) la fonction est donc croissante sur D_f

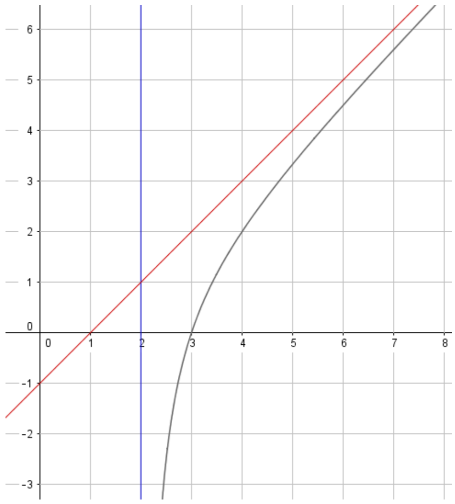
3) La fonction f est définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x-2}$ $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\lim_{x\to 2^+} 2$ et $\lim_{x\to 2^+} x - 2 = 0^+$ donc par quotient $\lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$ or de plus on a $\lim_{x\to 2^+} x - 1 = 1$ donc par différence $\lim_{x\to 2^+} x - 1 - \frac{2}{x-1} = -\infty$

On a donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$

4 a) $f(x) - (x-1) = -\frac{2}{x-1}$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = 0$

b)



Exercice 59P80

1) a) La fonction f est définie sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{9}{2x+1}$ donc $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}\, avec\, x>-\frac{1}{2}} f(x)$

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} 9 = 9$ et $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} 2x + 1 = 0^+$ donc par quotient $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{9}{2x+1} = +\infty$

de plus $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} 2x - 3 = -4$ ainsi par somme $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$

b) on a donc une tangente verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to+\infty} 2x + 1 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 9 = 9$ donc par quotient $\lim_{x\to+\infty} \frac{9}{2x+1} = 0$

de plus $\lim_{x\to+\infty} 2x - 3 = +\infty$ donc par somme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) a) $f(x) - (2x-3) = \frac{9}{2x+1}$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{9}{2x+1} = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-3)] = 0$ donc la droite d'équation $y = 2x - 3$ est l'asymptote oblique de la courbe de la fonction f vers $+\infty$

b) pour étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote on va devoir étudier le signe de la différence entre f et $y = 2x - 3$. $f(x) - (2x-3) = \frac{9}{2x+1}$ qui est un quotient de deux nombres positifs (en tout cas sur D_f)

ainsi $f(x)-(2x-3)>0$ et donc $f(x)>(2x-3)$ sur D_f. La courbe sera toujours au-dessus de l'asymptote.

4) a) $f'(x)=2+\frac{0-9\times 2}{(2x+1)^2}=2-\frac{4}{(2x+1)^2}=\frac{2(2x+1)^2}{(2x+1)^2}-\frac{18}{(2x+1)^2}=\frac{2(4x^2+4x+1)-4}{(2x+1)^2}=\frac{8x^2+8x+2-18}{(2x+1)^2}=\frac{8x^2+8x-16}{(2x+1)^2}=\frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$ de plus $(x+2)(x-1)=x^2-x+2x-2=x^2+x-2$ et donc $f'(x)=\frac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}$

b)

x	-0,5		1	
8		+		+
x+2		+	0	+
x-1		-		+
(2x+1)²	0	+		+
f'(x)	||	-	0	+
f(x)	||	+∞ ↘	2	↗ +∞

5) le minimum de la fonction étant deux son signe sera toujours positif.
f est continue et strictement décroissante entre -0,5 et 1 , de plus : $f(1)<10<\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$ donc (d'après un théorème hors programme) on est sûr que 10 a un unique antécédent par f sur $]-0,5;1]$
f est continue et strictement croissante à partir de 1 , de plus : $f(1)<10<\lim_{x\to+\infty} f(x)$ donc (d'après un théorème hors programme) on est sûr que 10 a un unique antécédent par f sur [1 ;+∞[
Ainsi 10 a exactement deux antécédents par f sur D_f

Exercice 56 P 39

1) On a ici : $\begin{cases} u_0=16\,000 \\ u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{4}{100}\right)\end{cases}$

$u_1=16\,640$ $u_2=17\,305{,}6\approx 17\,305$ $u_3=17\,997{,}824\approx 17\,998$

2) Au premier janvier 2010 il aura $u_4\approx 18\,718$ il lui manquera à peu près 1800€ pour pouvoir acheter sa machine à photocopier en 3D

3) En 2010 il a $u_4=u_0\times(1{,}04)^4$ si on veut $u_4\geq 20\,500$ on doit résoudre $u_0\times(1{,}04)^4\geq 20\,500$ et donc $u_0\geq\frac{20\,500}{1{,}04^4}$ or $\frac{20\,500}{1{,}04^4}\approx 17\,523$ donc arrondi à 10€ (dans le bon sens) il doit placer au moins 17 530 € en 2006

Exercice 58P38

1) Pour $a=2$, l'algorithme associe à u successivement les valeurs suivantes : 1 1,5 1,416… et 1,41421…
Pour $a=3$, l'algorithme associe à u successivement les valeurs suivantes : 1,5 1,75 1,732… et 1,732…
u semble s'approcher de $\sqrt{2}$ dans le premier cas $\sqrt{3}$ dans le suivant autrement dit de $\sqrt{a}$

2) **Entrée**
    Saisir a
Initialisation
    u prend la valeur $a/2$
    v prend la valeur $(u+\frac{a}{u})/2$
Traitement
    tant que |u-v|≥ 10^{-6}
        u prend pour valeur v
        v prend pour valeur $(v+\frac{a}{v})/2$
    Fin du tant que
Sortie
    Afficher u