Suites numériques

I. Utilisation de la calculatrice

Rappel
Une suite (u_n) peut être définie par une formule directe ne dépendant que de n, et donc dans ce cas il existe une fonction f définie au moins sur $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$
Une suite (u_n) peut-être aussi définie par récurrence, c'est-à-dire qu'il existe une formule permettant de passer d'un terme u_n au terme suivant u_{n+1}, autrement dit il existe une fonction f telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

Remarque : il existe des suites qui sont définies de manière mixte, mais on ne les étudies pas cette année.

Exemple :
Pour la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 - 5n + 6$, la fonction f sera définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x + 6$
Pour la suite (w_n) définie par $\begin{cases} w_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 4 \end{cases}$, la fonction f sera définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + 4$

Les calculatrices sont dotées de fonctions intégrées pour étudier les suites, vous pouvez trouver sur net ou sur leur manuel comment se servir de ces fonctions. Notre approche sera sensiblement différente : on va programmer nos outils.

La première étape pour étudier une suite sera de déduire de sa formule de définition si l'on a à faire à une suite définie en fonction de n ou une suite définie par récurrence, puis on déduira des informations la fonction f et on la rentrera dans le champ prévu à cet effet ($\boxed{\text{f(x)=}}$ dans le champ $\backslash Y_1 =$ pour les texas instrument)

Pour écrire un programme il faut être capable d'imaginer ce que va devoir faire la machine pour chaque situation, puis être capable de l'exprimer de manière claire à l'aide d'étape aussi basique que possible.

Structure basique de programme :
Les actions se situent dans trois catégories : entrée , traitement, sorties (souvent dans cet ordre).
Utilisation d'une boucle

Programme 1 : déterminer la valeur pour un indice donné d'un terme de la suite

Algorithme programme

Notion de test

Programme 2 : déterminer à partir de quel rang on dépasse une valeur donnée

Algorithme programme

Programme 3: on pourrait adapter le programme 2 pour trouver à partir de quel rang on passe sous une valeur.

II. découverte des limites et définition

Rappel
Si une suite a un premier terme, elle n'en a pas de dernier, elle ne s'arrête jamais.
Quand on observe les premiers termes d'une suite, on peut se faire une petite idée de la manière dont elle va continuer à évoluer, mais des fois on a des surprises.

Exemples :
Soit (u_n) , (v_n) , (w_n) , (s_n) et (t_n) cinq suites définies en fonction de n par les formules suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$, $v_n = -n^2 + 2 \times 10^{10} n$, $w_n = \frac{2n-1}{n}$, $s_n = 0{,}99^n$ et $t_n = 1{,}01^n$.
Determiner pour chacune des suites les termes de rang 0, 1, 10 ,100, 1000, 10^6 et 10^9.
Quelles sont vos impressions ?
Testez les termes de rang 10^{11} et 10^{12} est ce que vos impressions sont toutes confirmées ?

Définitions
On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ quand pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes u_n sont supérieur à 10^p.
On écrira alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
On dit que la suite (v_n) admet pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ quand pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes v_n sont inférieur à -10^p.
On écrira alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Exemple
Déterminer les limites de (w_n) et (s_n) définies par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = n^2$ et $s_n = -\sqrt{n}$
On se doute que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$, il faut maintenant le prouver.
Soit p un entier positif fixé
$n^2 \geq 10^p \Leftrightarrow n \geq \sqrt{10^p}$ (l'implication directe est évidente en utilisant la fonction racine qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$, pour la réciproque : n et $\sqrt{10^p}$ étant deux réels positifs et la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ l'ordre est conservé)
Donc pour être sûr que w_n dépasse 10^p il nous suffit de prendre un rang supérieur ou égal à $\sqrt{10^p}$
On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$
$-\sqrt{n} \leq -10^p \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 10^p \Leftrightarrow n \geq (10^p)^2$ (comme pour l'exemple précédent l'équivalence s'appuie
$\Leftrightarrow n \geq 10^{2p}$ sur la croissance des fonctions carré et racine carré sur $\mathbb{R}^+$)
Donc pour être sûr que s_n soit inférieur à -10^p il suffit de prendre un rang plus grand que 10^{2p}
donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$.

Définitions
On dit que la suite (u_n) admet pour limite l quand n tend vers $+\infty$ signifie : pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang à parti duquel tous les termes u_n vérifient$|u_n - l| \leq 10^{-p} \Leftrightarrow l - 10^{-p} \leq u_n \leq l + 10^{-p}$ sont supérieur à 10^p, ce qui en d'autres terme dit que la distance entre u_n et l est inférieure à 10^{-p}.
On écrira alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Exemple :
Déterminer la limite de la suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{2n-1}{n}$
On se doute qu'elle vaut 2, maintenant prouvons le
Soit p un entier positif , cherchons n tel que :
$2 - 10^{-p} \leq w_n \leq 2 + 10^{-p} \Leftrightarrow 2 - 10^{-p} \leq \frac{2n-1}{n} \leq 2 + 10^{-p} \Leftrightarrow 2 - 10^{-p} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2 + 10^{-p}$
$\Leftrightarrow -10^{-p} \leq -\frac{1}{n} \leq 10^{-p} \Leftrightarrow 10^{-p} \geq \frac{1}{n} \geq -10^{-p} \Leftrightarrow n10^{-p} \geq 1 \geq -n10^{-p} \Leftrightarrow n \geq 10^p \geq -n$
Pour que la distance entre w_n et 2 soit plus petite que 10^{-p} il nous suffit donc de prendre des rangs supérieurs ou égaux à 10^p.

III. rappel sur les suites géométriques

Rappel
Une suite est dite géométrique de raison q si on passe d'un terme au suivant en multipliant par q.
Pour définir une telle suite on a besoin de connaitre la raison et le premier rang.
Une telle suite admet alors comme définition par récurrence : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n\, q \end{cases}$ et pour définition en fonction de n :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\ \times q^n$

Remarque : si on ne connait pas la valeur du premier terme d'une suite géométrique mais juste celle d'un terme quelconque de rang m alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_m\ \times q^{n-m}$
Ici $n - m$ est le nombre de transition à effectuer pour passer du $m^{ième}$ terme au $n^{ième}$

Utilité
Les suites géométriques sont très utiles pour étudier les augmentations ou diminutions régulières, ou l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant ou retranchant un pourcentage.

Rappel :
Augmenter une quantité de x% revient à la multiplier par $(1 + \frac{x}{100})$
Diminuer une quantité de x% revient à la multiplier par $(1 - \frac{x}{100})$

Exemple
Si l'on gagne 21 000€ en 2015 et que notre contrat nous garantisse une augmentation de 5% par ans, alors s'intéresser à nos salaires les années suivantes revient à s'intéresser aux termes d'une suite géométrique de raison $\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1{,}05$
En utilisant la remarque je peux déduire qu'en 2020 on gagnera :
$u_{2020} = u_{2015} \times 1{,}05^{2020-2015} = 21000 \times 1{,}05^5 \approx 26\,801{,}9€$

IV. somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q
Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ou pour faire plus propre $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$

Calculer la valeur des termes d'une telle suite de manière en passant par la définition risque de prendre pas mal de temps donc on cherche un raccourci

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$
Donc $S_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^{n-1} + u_0 q^n$
qS_n =……..
Donc $S_n - qS_n$ =……..
En déduire une expression simple de S_n (pensez à factoriser le membre de gauche) $S_n =$

Formule générale
Qui est valable même si on ajoute les termes sans commencer à u_0

$$S_n = (premier\ terme) \times \frac{1 - q^{nombre\ de\ termes}}{1 - q}$$

Remarque : il faut être très vigilant quand on compte le nombre de termes.

V. Limite des termes d'une suite géométrique

Activité : a l'aide du premier exemple du II, ainsi que l'étude des suites $u_n = (-3)^n$, $v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $w_n = 5^n$
Conjecturez les limites des suites de la forme $u_n = q^n$ en fonction de la valeur de n

Propriété :

Soit q un réel alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \ si \ q>1 \\ 1 \ si \ q=1 \\ 0 \ si \ -1<q<1 \\ n'a \ pas \ de \ limite \ si \ q\leq-1 \end{cases}$

Corollaire : limites de suites géométriques
Soit (u_n) une suite géométrique définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0\, q^n$ alors

Si $u_n > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \ si \ q>1 \\ u_0 \ si \ q=1 \\ 0 \ si \ -1<q<1 \\ n'a \ pas \ de \ limite \ si \ q\leq-1 \end{cases}$

on a à peu près les mêmes résultat que pour les puissances de q

Si $u_n < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} -\infty \ si \ q>1 \\ u_0 \ si \ q=1 \\ 0 \ si \ -1<q<1 \\ n'a \ pas \ de \ limite \ si \ q\leq-1 \end{cases}$