Entrainement DS 1

Exercice 1

1) Dériver les fonctions définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{3}{x^8} + \frac{7}{x^9} - \frac{5}{x^{10}}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}, g(x) = \frac{x^2-3}{2x+5}$

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (8x^2 - 5)(2x + 3)$

$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \frac{2x-3}{x^2+5}$

$\forall x \in \mathbb{R}, j(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 7$

2) Donner le tableau de variation des fonctions f et j.

Exercice2

Soit (b_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = 2^{3n-1}$

1) Déterminer b_0, b_1 et b_2 puis conjecturer la nature de la suite.
2) Prouver proprement votre conjecture (vous préciserez les paramètres de la suite)

Exercice 3 Déterminer les sommes suivantes

a) $\begin{cases} u_0 = 240 \\ u_{n+1} = -0{,}5u_n \end{cases}$ S=$u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$ $S' = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$

b) $\begin{cases} u_8 = \frac{1}{27} \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ S=$u_8 + u_9 + \cdots + u_{15}$ $S' = u_{11} + u_{12} + \cdots + u_{19}$

Exercice4 Complétez le tableau suivant :

En français	Définition par récurrence	Définition en fonction de n
(w_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $w_0 = \frac{2}{3}$		
		$t_n = 13 \times 0{,}85^{n-4}$
	$\begin{cases} u_{10} = 240 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$	
		$a_n = 2 \times 3^{2n+1}$

Exercice5

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5(-0{,}4)^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -5(+7)^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (-4)^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - 0{,}90^n$

Exercice6

Le taux de croissance de la population française est de 0,5% depuis 2010, et on pense qu'il va rester stable jusqu'en janvier 2030. Au premier janvier 2010 la France était peuplée de 64 612 939 habitants

Soit la suite (u_n) qui à tout $n \geq 10$ associe l'effectif de la population française au premier janvier de l'année 2000+n.

1) Donner une définition par récurrence de la suite (u_n)
2) A quel type de suite à-t-on à faire ? Donner ses caractéristiques.
3) Donner une valeur approchée à l'unité près de u_{11}, u_{12}, u_{13}
4) Donner une expression de u_n en fonction de n
5) A l'aide de la suite prévoir la population au premier janvier 2016
6) Allez sur le site de l'INSEE et récupérez la vrai valeur, puis donner le pourcentage d'écart entre la valeur réelle (celle de l'INSEE, qui même provisoire sera considérée comme juste) et la valeur théorique.
7) Faire la somme des populations du premier janvier 2011 au premier janvier 2030
8) En déduire la population moyenne française sur cette période

Correction de l'entrainement au DS1

Exercice 1 **1)** Dériver les fonctions définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{3}{x^8} + \frac{7}{x^9} - \frac{5}{x^{10}}$ $f'(x) = \frac{-3\times 8}{x^9} + \frac{-7\times 9}{x^{10}} - \frac{-5\times 10}{x^{11}} = -\frac{24}{x^9} - \frac{63}{x^{10}} + \frac{50}{x^{11}} = \frac{-24x^2-63x+50}{x^{11}}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}, g(x) = \frac{x^2-3}{2x+5}$$

je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{(u'v-uv')}{v^2}$ avec $(x) = x^2 - 3$, $v(x) = 2x + 5$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$

ainsi$g'(x) = \frac{2x(2x+5)-(x^2-3)2}{(2x+5)^2} = \frac{4x^2+10x-2x^2+6}{(2x+5)^2} = \frac{2x^2+10x+6}{(2x+5)^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (8x^2-5)(2x+3)$$

je reconnais $uv \to u'v + uv'$ avec $(x) = 8x^2 - 5, v(x) = 2x + 3$, $u'(x) = 16x$ et $v'(x) = 2$

ainsi$h'(x) = 16x(2x+3) + (8x^2-5)2 = 32x^2 + 48x + 16x^2 - 10 = 48x^2 + 48x - 10$

$$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \frac{2x-3}{x^2+5}$$

je reconnais $\frac{u}{v} \to \frac{(u'v-uv')}{v^2}$ avec $(x) = 2x - 3$, $v(x) = x^2 + 5$, $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$

ainsi$g'(x) = \frac{2(x^2+5)-(2x-3)2x}{(x^2+5)^2} = \frac{2x^2+10-4x^2+6x}{(x^2+5)^2} = \frac{-2x^2+6x+10}{(x^2+5)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, j(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 7$

$j'(x) = 5\times 4x^3 - 8\times 3x^2 + 2\times 2x = 20x^3 - 24x^2 + 4x = 4x(5x^2-6x+1)$

2) Donner le tableau de variation des fonctions$f$ et j.

$f'(x) = \frac{-24x^2-63x+50}{x^{11}}$cherchons le signe du numérateur$-24x^2 - 63x + 50$

$\Delta = (-63)^2 - 4(-24)50 = 3969 + 4800 = 8769$

donc le numérateur a deux racines $x_1 = \frac{63-\sqrt{8769}}{2\times(-24)} = \frac{63-\sqrt{8769}}{-48} \approx 0{,}64$ et $x_2 = \frac{63+\sqrt{8769}}{-48} \approx -3{,}26$ ici $x_2 < 0 < x_1$

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
$-24x^2-63x+50$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^{11}		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

x		0		x_1		x_2		$+\infty$
$4x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x^2-6x+1$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$j'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$j(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$j'(x) = 4x(5x^2-6x+1)$cherchons le signe de $5x^2 - 6x + 1$

$$\Delta = (-6)^2 - 4\times 5\times 1 = 36 - 20 = 16$$

donc ce polynôme a deux racines $x_1 = \frac{6-\sqrt{16}}{2\times 5} = \frac{6-4}{10} = \frac{1}{5}$ et $x_2 = \frac{6+\sqrt{16}}{2\times 5} = \frac{6+4}{10} = 1$ ici $0 < x_1 < x_2$

Exercice2 Soit (b_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = 2^{3n-1}$

1) $b_0 = 2^{3\times 0-1} = \frac{1}{2}, b_1 = 2^{3\times 0-1} = 4$et $b_2 = 2^{3\times 2-1} = 32,$

$\frac{b_1}{b_0} = 8$et $\frac{b_2}{b_1} = 8$. La suite semble être géométrique de raison 8 et de premier terme $b_0 = \frac{1}{2}$.

2) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{3(n+1)-1}}{2^{3n-1}} = \frac{2^{3n+3-1}}{2^{3n-1}} = 2^{3n+3-1-(3n-1)} = 2^3 = 8$ ainsi $b_{n+1} = 8b_n$ la suite est donc bien géométrique de raison 8 et de premier terme $b_0 = \frac{1}{2}$

Exercice 3 Déterminer les sommes suivantes

a) $\begin{cases} u_0 = 240 \\ u_{n+1} = -0{,}5u_n \end{cases}$ S=$u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 240\frac{1-(-0{,}5)^{21}}{1-(-0{,}5)} = 240\frac{1-(-0{,}5)^{21}}{1{,}5} \approx 160$

$$S' = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12} = u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = 240(-0{,}5)^5\frac{1-(-0{,}5)^{12-5+1}}{1-(-0{,}5)} = -7{,}5\frac{1-(-0{,}5)^8}{1{,}5} \approx -5{,}02$$

b) $\begin{cases} u_8 = \frac{1}{27} \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ S$=u_8 + u_9 + \dots + u_{15} = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = u_8 \frac{1-q^{15-8+1}}{1-q} = \frac{1}{27}\frac{1-3^{15-8+1}}{1-3} = \frac{1}{27}\frac{1-3^8}{-2} \approx 121{,}48$

$$S' = u_{11} + u_{12} + \dots + u_{19} = u_{11}\frac{1-q^{19-11+1}}{1-q} = u_8 3^3 \frac{1-3^9}{1-3} = \frac{1}{27} 9 \frac{1-3^9}{-2} = \frac{1-19683}{-6} \approx 3280{,}33$$

Exercice4 Complétez le tableau suivant :

En français	Définition par récurrence	Définition en fonction de n
(w_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $w_0 = \frac{2}{3}$	$\begin{cases} w_0 = \frac{2}{3} \\ w_{n+1} = 4w_n \end{cases}$	$w_n = \frac{2}{3}4^n$
(t_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $t_4 = 13$ ou de premier terme $u_0 = 13/0{,}85^4$	$\begin{cases} t_4 = 13 \\ t_{n+1} = 0{,}85\, t_n \end{cases}$	$t_n = 13 \times 0{,}85^{n-4}$
(u_n) est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme $u_{10} = 240$	$\begin{cases} u_{10} = 240 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$	$u_n = 240(-5)^{n-10}$
(a_n) est une suite géométrique de raison 9 et de premier terme $a_0 = 6$	$\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_{n+1} = 9a_n \end{cases}$	$a_n = 2 \times 3^{2n+1} = 6 \times (3^2)^n$

Exercice5

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5(-0{,}4)^n$ Soit (u_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_n = 5(-0{,}4)^n$ la suite est géométrique de raison -0,4 comprise strictement entre -1 et 1 et de premier terme $u_0 = 5$ positif donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5(-0{,}4)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -5(+7)^n$ Soit (v_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n = 5 \times 7^n$ la suite est géométrique de raison 7 strictement plus grande que 1 et de premier terme $u_0 = 5$ positif donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} -5(+7)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} -v_n = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-4)^n$ On est confronté à une suite géométrique de raison -4 strictement plus petite que -1 donc il n'y a pas de limite.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - 0{,}90^n$ Soit (w_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $w_n = 1 \times (0{,}9)^n$ la suite est géométrique de raison 0,9 comprise strictement entre -1 et 1 et de premier terme $w_0 = 1$ positif donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}90^n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 - 0{,}90^n = 5$ par différence.

Exercice6. $\begin{cases} u_{10} = 64\,612\,939 \\ u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right) \end{cases}$

2) C'est une suite géométrique de raison $q = \left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right) = 1{,}005$ et de premier terme $u_{10} = 64\,612\,939$
3) $u_{11} \approx 64\,936\,004$, $u_{12} \approx 65\,260\,684$, $u_{13} \approx 65\,586\,987$
4) D'après la question 2) on a $u_n = u_{10} \times q^{n-10} = 64\,612\,939 \times 1{,}005^{n-10}$
5) au premier janvier 2016 la population sera $u_{16} 64\,612\,939 \times 1{,}005^{16} \approx 66\,575\,719$
6) sur le site de l'INSEE la vrai valeur est de 66 627 602, évaluons l'écart relatif entre les deux valeurs : $e = \frac{66\,575\,719 - 66\,627\,602}{66\,627\,602} 100 \approx -0{,}077$ l'écart entre la valeur théorique et la valeur réelle est de 0,0077%
7) $S_{11,30} = u_{11} + u_{12} + \dots + u_{30} = u_{11}\frac{1-1{,}005^{30-11+1}}{1-1{,}005} = u_{10} 1{,}005 \frac{1-1{,}005^{20}}{1-1{,}005} \approx 64\,936\,004 \times \frac{1{,}005(1-1{,}005^{20})}{-0{,}005}$ $\approx 1\,362\,299\,918$
8) la population moyenne française sur cette période sera $\frac{S_{11,30}}{30-11+1} = \frac{S_{11,30}}{20} \approx 68\,114\,996$

Méthodes

savoir déterminer un terme précis d'une suite (par exemple u_5)

- si la suite est définie en fonction de n, trouver u_5 correspond à remplacer n par 5 dans la formule de définition
- si la suite est définie par récurrence, il faudra calculer successivement tous les termes jusqu'à u_5
  - on peut utiliser la calculatrice rentrer le premier terme appuyer sur Exe puis rentrer la formule en remplaçant tous les u_n par des *Rep* (ou des *Ans* si votre calculatrice est en anglais)

savoir créer et comprendre l'algorithme et le programme pour les deux situations type

- pour déterminer le terme d'une suite, par exemple : $\begin{cases} u_{10} = 64 \\ u_{n+1} = 0.5u_n - 3 \end{cases}$:

Algorithme en français	TI	Casio
demander N le rang du terme cherché	Prompt N	« N= » ? →N
Rentrer dans la mémoire la valeur du premier terme	$64 \to U$	$64 \to U$
faire une boucle pour i allant de l'indice du second terme (généralement 1 mais qui ici vaut 10) jusqu'à N	for(I,10,N)	for 10→I to N
Calculer le nouveau U	$0{,}5U - 3 \to U$	$0{,}5U - 3 \to U$
Fermer la boucle	End	Next
Afficher la valeur du bon terme U	Disp U	U

- Pour savoir quand est ce qu'une suite dépasse un seuil,
  par exemple quand est ce que (u_n)définie par $\begin{cases} u_{10} = 64 \\ u_{n+1} = 0.5u_n - 3 \end{cases}$ passe sous -1 ?

Algorithme en français	TI	Casio
Rentrer dans la mémoire la valeur du premier terme	$64 \to U$	$64 \to U$
faire une boucle qui tournera tant que l'objectif n'est pas atteint	While U≥-1	While U≥-1
Calculer le nouveau U	$0{,}5U - 3 \to U$	$0{,}5U - 3 \to U$
Augmenter le rang de 1	$N + 1 \to N$	$N + 1 \to N$
Fermer la boucle	End	WhileEnd
Afficher le rang	Disp N	N

Etudier les variations d'une suite (1ES)

- On étudie les signe de $u_{n+1} - u_n$ s'il est positif la suite est croissante , s'il est négatif la suite est décroissante
- Cas de la suite géométrique de positif : $q > 1$ la suite est croissante Bonus sa limite tends vers $+\infty$
  $q = 1$ constante sa limite est u_0
  $0 < q < 1$ la suite est décroissante sa limite est 0
  (si le premier terme est négatif alors l'ordre est inversé)

Savoir prouver qu'une suite est géométrique

- Prouver que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (la constante est la raison) ⇔ Trouver q tel que $u_{n+1} = qu_n$
- Si la définition de u_n est de la forme $u_n = a \times b^n$ le premier terme est $u_0 = a$ et la raison est b. Si elle est de la forme $a \times b^{n-p}$ alors elle est de raison b et de premier terme $u_p = a$.
- Si (v_n) est une suite auxiliaire dans le cadre d'un travail sur une suite arithmético-géométrique : on part de v_{n+1} on exprime ça en fonction de u_{n+1} puis à l'aide de la formule de définition de (u_n) par récurrence on exprime ça en fonction de u_n et là avec la formule liant $u_n$et v_n on trouve qv_n

Savoir prouver qu'une suite est arithmétique (1ES)

- Prouver que $u_{n+1} - u_n$ est constant (la constante est la raison) ⇔ Trouver r tel que $u_{n+1} = u_n + r$
- Si la définition de u_n est de la forme $u_n = a + b \times n$ le premier terme est $u_0 = a$ et la raison est b.

savoir calculer la somme des termes

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = premier\ terme \frac{1-q^{nombres\ de\ termes}}{1-q}$$

limites de suites

Cas de la suite géométrique de positif : $q > 1$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$q = 1$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$

$-1 < q < 1$ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ sinon pas de limite.

Construction graphique des termes d'une suite

Si on a une suite définie par récurrence par $\begin{cases} u_p = \cdots \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ on trace dans un repère (D)la droite d'équation $y = x$ et C_f la courbe représentative de f puis en partant de u_p sur l'axe des abscisse on alterne :

- Trait vertical vers C_f
- Trait horizontal vers (D)

Pour la lecture des termes on prolonge les traits verticaux en pointillé jusqu'à l'axe des abscisses et on lit sur cet axe les valeurs des termes successifs.

Pourcentages

Augmenter une quantité de $t\%$ c'est la multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$

Diminuer une quantité de $t\%$ c'est la multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$

Prendre $t\%$ d'une quantité c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$

Déterminer un pourcentage : $\frac{Valeur\ étudiée - valeur\ de\ référence}{valeur\ de\ référence} \times 100$

Tableau de variation (par l'exemple)

Etudier les variations de f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ $par\ f(x) = \frac{3}{x^8} + \frac{7}{x^9} - \frac{5}{x^{10}}$

1) Premièrement on dérive la fonction et on la factorise au maximum

$f'(x) = \frac{-3\times8}{x^9} + \frac{-7\times9}{x^{10}} - \frac{-5\times10}{x^{11}} = -\frac{24}{x^9} - \frac{63}{x^{10}} + \frac{50}{x^{11}} = \frac{-24x^2-63x+50}{x^{11}}$

2) Puis on cherche les valeurs d'annulation de chaque facteur de la dérivée

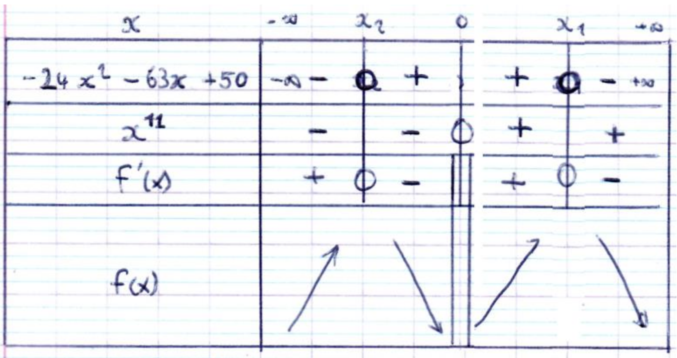
Racines de : $-24x^2 - 63x + 50$

$\Delta = (-63)^2 - 4(-24)50 = 3969 + 4800 = 8769$

$\Delta > 0$donc le numérateur a deux racines :

$x_1 = \frac{63-\sqrt{8769}}{2\times(-24)} = \frac{63-\sqrt{8769}}{-48} \approx 0{,}64$

et $x_2 = \frac{63+\sqrt{8769}}{-48} \approx -3{,}26$



x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
$-24x^2-63x+50$	$-\infty$	−	0	+		+	0	−	$+\infty$
x^{11}		−		−	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	‖	↗		↘	

3) On crée un tableau :
   a. première ligne : les x allant de -∞ à +∞ et passant par toutes les valeurs d'annulations repérées.
   b. Une ligne par facteur
   c. Une ligne pour f' remplie avec la règle des signes, on descend les 0 ou on met des doubles barres si la valeur d'annulation annule le dénominateur
   d. Une ligne pour la fonction , ça monte quand la dérivée est positive sinon ça descend. Attention la si la dérivée a des doubles barres alors on les tires jusqu'en bas.