Exponentielles et logarithmes : activités de démonstration

Pour l'expo : elle peut être abordée de deux manières différentes

1) Définie comme étant la réciproque de la fonction logarithme
2) Définie comme étant la solution du système : $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ ou f est une fonction dérivable sur R

Méthode 1

Si l'on considère que la fonction $\ln x$ est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, et donc elle admet une fonction inverse que l'on notera f.

On a donc $\ln\big(f(x)\big) = x$

Methode 2

On admettra que le système $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ a une unique solution (sinon tu pleures)

1) On pose $\varphi(x) = f(x)f(-x)$, est ce que $f$est dérivable , si oui quelle est sa dérivée sous sa forme la plus simplifiée.
2) Que peut-on en déduire sur φ ?
3) calculez (0) , précisez votre réponse au 2)
4) Que peut-on en déduire sur le signe de $f(x)$ et de $f(-x)$
5) Est-ce que f peut s'annuler ?
6) Intuitivement que peut-on en déduire sur le signe de , précisez votre réponse en utilisant la valeur de$f(0)$

On pourra donc en déduire que $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ (on a le droit de diviser car $f(x)$ est toujours strictement positive.

On pourrait ici aussi utiliser , si on a fait les logarithmes avant, la primitive de $\frac{f'}{f} = 1$ ça nous donne $\ln\big(f(x)\big) = x + cte$, et vu que $f(0) = 1$ on aura en prenant $x = 0$ $\ln\big(f(x)\big) = \ln\big(f(0)\big) = \ln(1) = 0$ et $x + cte = 0 + cte = cte$ et donc 0=cte conclusion $\ln\big(f(x)\big) = x$ et donc f est la fonction inverse de $\ln(x)$ on pourrait faire un petit schéma.

Autre approche : on pourrait retrouver les propriétés de l'expo en posant y un réel quelconque et $k(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$

$k'(x) = \frac{1f'(x+y)f(x) - f(x+y)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{f(x+y)f(x) - f(x+y)f(x)}{f^2(x)} = 0$ donc k est constante

De plus $k(0) = \frac{f(0+y)}{f(0)} = \frac{f(y)}{1} = f(y)$ on a donc pour tout x $\frac{f(x+y)}{f(x)} = f(y)$ autrement dit $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Ceci sera vrai aussi quelque soit la valeur de y et donc on a notre relation fonctionnelle

Et d'elle découle $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ et $f(nx) = [f(x)]^n$ (qui servira à prouver les limites en 0 et $+\infty$)

Il ne reste alors qu'à introduire des notations $f(x) = \exp(x) = e^x$ et à faire une petite étude et voila !