Chap 4 – La fonction exponentielle

I. Définition et propriétés de base :

1. Equation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$:

(utiliser l'activité, elle est accessible pour les TSTL)

Théorème 1 :

Il existe une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, et notée **exp** : $f(x) = \exp(x)$.

2. Propriétés de la fonction exponentielle :

- Par définition : exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exp' = ……
- Par définition : exp(0) = …..
- exp(1) est noté …… (≈ …….), c'est un nombre irrationnel (comme π).
- exp ne s'annule jamais. Donc puisqu'elle est continue (car dérivable) et que exp(0) = 1 > 0, alors elle est strictement positive : **pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.**

Propriété 2: pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- pour tout $n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = [\exp(x)]^n$. (vrai pour les entiers positifs **et** négatifs)

Démonstration (à connaitre)

Exemple 1 : écrire exp(3) et exp(-6) en fonction de e.

3. Notation e^x

Définition 1: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$. On généralise cette notation vraie sur $\mathbb{Z}$ en posant : pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$. On utilisera dorénavant cette notation.

Pour se rendre compte du genre de progression associée avec la fonction exponentielle on peut passer par l'étude de plusieurs suites géométriques (on connectera les points ultérieurement)

Propriété 3: *les propriétés de la fonction exponentielle s'énoncent ainsi plus facilement :*

$$\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y} \qquad \boldsymbol{e^{-x} = \frac{1}{e^x}} \qquad \boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}} \qquad \boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$$

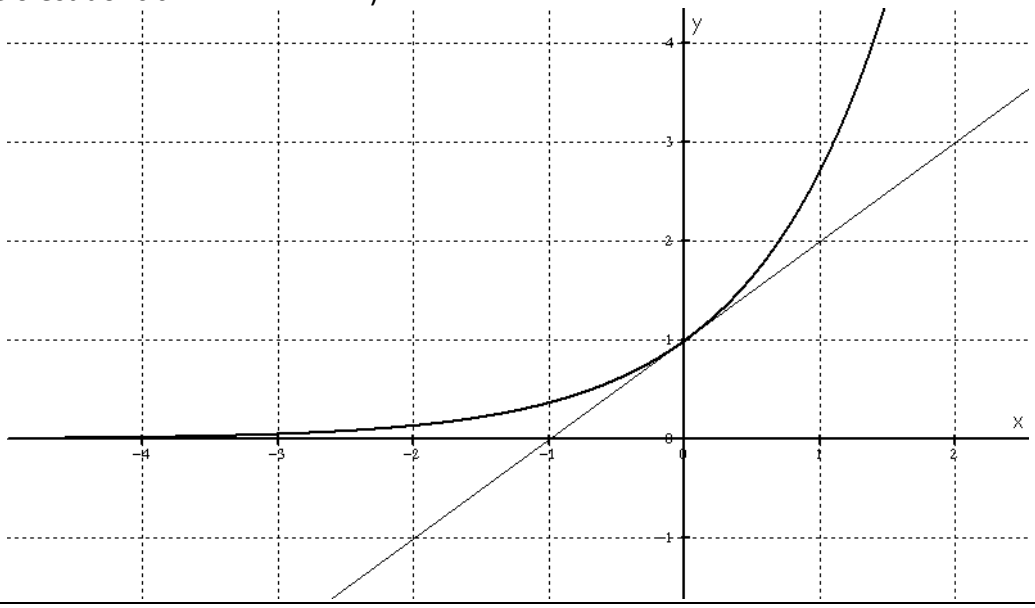
Exemple 2 : Simplifier les expressions $(e^{2x})^2 \times e^{-x}$, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ et $\frac{(e^{6x-3})^2 \times e^{4x}}{e^{1-x}}$.

II. Etude de la fonction exponentielle:

1. Sens de variation et limites :

Propriété 5:

- sens de variation : la fonction exponentielle est ……sur $\mathbb{R}$.
- limites $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$ …….. et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$ ……..
- Représentation graphique avec la tangente en 0 d'équation $y = x + 1$: (l'approximation affine de exp au voisinage de 0 est donc $e^x \approx$ ……)



Démonstrations (à connaitre)

Conséquences :

- Pour tout m strictement positif, l'équation $e^x = m$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

(d'après le ……)

- **Résolution d'équations/inéquations avec exp** : on utilise $\boxed{\boldsymbol{e^x = e^y \Leftrightarrow x = y}}$ et $\boxed{\boldsymbol{e^x > e^y \Leftrightarrow x > y}}$

Exemple 3: Résoudre l'inéquation $e^{x+1} \leq e^{2x}$.

Propriété 6 : $\lim\limits_{h\to0} \frac{e^h-1}{h} = \exp'(0) =$ ……. (taux de variation de exp en en 0).

Propriété 7 : *indéterminée levées par croissance comparée* : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Démonstration (à connaitre):

Conséquence : pour tout$n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Exemple 4 : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{1000}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

2. Fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$:

Propriété 8 : Soit u une fonction dérivable sur une intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction e^u est dérivable sur I et $\boldsymbol{(e^u)' = u'e^u}$

Exemple 5: dériver $f: x \mapsto e^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$ et $g: x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$.