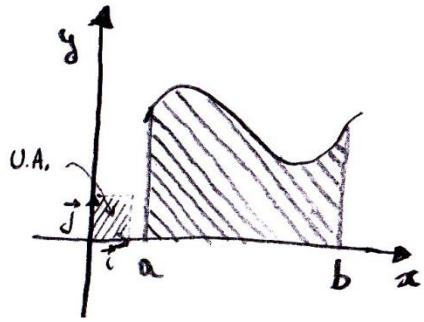
Chap – Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction sur un intervalle :

Notation $\int_a^b f(x)dx$ introduite vers 1820 par les français Fourier et Cauchy, qui prolonge le signe $\int$ utilisé par l'allemand Leibniz. Le symbole est une déformation du « S » de somme.

1. Définition

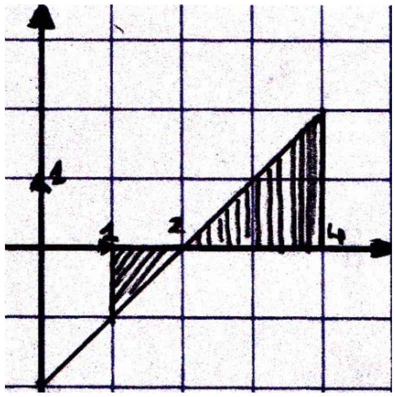


Définition : $a, b \in \mathbb{R}$. Soit *f* une fonction **continue** et **positive** sur [*a* ; *b*]. On appelle **intégrale de *f* entre *a* et *b*** l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de *f*, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. Cette intégrale se note $\int_a^b f(x)dx$ et se lit « intégrale de *a* à *b* de *f* » Le résultat se donne en unité d'aire (u.a).

Remarque : l'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ des axes.

Remarque : une intégrale a une valeur numérique, on dit que la variable est « muette » car elle ne figure pas dans le résultat. Elle peut être remplacée par une autre : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Définition : Si *f* est **négative** sur [*a ; b*], l'intégrale de *f* est l'opposé de cette aire, elle est donc négative. Si *f* change de signe sur [*a ; b*], on subdivise l'intervalle de façon à pouvoir appliquer les définitions ci-dessus.



Exercice : $f(x) = x - 2$. Calculer $\int_1^4 f(x)dx$.
Sur l'intervalle [1 ;4] la courbe est négative sur [1 ;2] puis positive sur [2 ;4]
Il faut donc compter négativement la première aire et positivement la seconde ainsi :
$\int_1^4 f(x)dx = -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{3}{2}$

Définition :
Pour toute fonction *f* continue sur [*a ; b*], la **valeur moyenne de *f* sur [*a ; b*]** est le réel : $m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx$

Interprétation géométrique : c'est la hauteur du rectangle qui aurait la même aire que $\int_a^b f(x)dx$ et qui est délimité par les mêmes verticales.

Exercice : Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x - 2$ sur $[1; 4]$.

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{4-1} \times \int_1^4 f(x)dx = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Propriétés :

Propriété : Si *f* est une constante k sur I, alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx$ = k(b-a)

Théorème : (admis) Toute fonction **continue** sur $[a ; b]$ admet une intégrale sur cet intervalle.

.

Propriété : (*se démontrent facilement avec l'aire*) *f* et *g* sont deux fonctions continues sur I, et $a, b, c \in I$. a<b

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- Permutation des bornes de l'intégrale : $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- Linéarité : (1) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

  (2) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- Positivité : Si f est une fonction positive sur $[a ; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

• Ordre : Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ (se démontre en utilisant la positivité de $f-g$) et avec la première propriété de linéarité)

•Inégalité de la moyenne : Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a\,;b]$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Théorème : Soit f une fonction continue sur I, et $a \in I$. La fonction définie sur I par $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et sa dérivée est f. F est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Conséquence : **Toute fonction continue admet une primitive sur I.**

Remarque : attention à la différence entre les variables x et t.

II. Méthodes de calcul d'une intégrale :

Propriété : $a, b \in I$. Si F est une primitive de f sur I, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ qu'on écrit $[F(x)]_a^b$.

Démonstration :
Soit F une primitive de f alors $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$ de plus $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c$ donc $F(a) + c = 0$
Donc $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$ Donc si on pose x=a on aura : $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Méthode d'utilisation : On veut calculer $\int_0^1 (e^x - x)dx$. Une primitive de $f(x) = e^x - x$ est $F(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$
Compléter : $\int_0^1 (e^x - x)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e^1 - \frac{1^2}{2} - \left(e^0 - \frac{0^2}{2}\right) = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$

Exercice : Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(|x^2+1|)\right]_1^2 = \frac{1}{2}ln5 - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 e^{x+1}dx = [e^{x+1}]_{-1}^1 = e^2 - e^0$$

III. Quelques applications du calcul intégral :

Exemple: Calculer l'aire de ce berlingot, sachant que les courbes qui le délimitent sont celles des fonctions cos et –cos .
A=$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt + \left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)\,dt\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$
$= 2[\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4u.a.$