Devoir surveillé STL (2h)

EXERCICE 1

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures.

Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l'instant t = 0, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 °C.

PARTIE A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle [0,+∞[par :

$$f\ (t)\ =\ 35e^{-1,6t} - 30$$

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.
2. Étudier le sens de variation de la fonction .
3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $f\ (t)\ =\ -24$ et interpréter le résultat trouvé.

PARTIE B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation.

La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle [0,+∞[, qui est solution de l'équation différentielle $y\,' + 1,5y\ = -52,5$

1. Résoudre l'équation différentielle $y\,' + 1,5y\ = -52,5$.
2. a. Justifier que g (0) = 5.
   b. Vérifier que la fonction g est définie par $g\ (t)\ =\ 40e^{-1,5t}\ - 35$.
3. Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?

EXERCICE 2

Jusqu'à présent Pierre n'a encore jamais réussi à économiser un seul euro. Pour le responsabiliser dans la gestion de son argent de poche, ses parents décident de lui verser 30 euros tous les premiers du mois. Pierre décide que pour s'offrir le téléphone de ses rêves qui coûte 150 euros, il ne dépensera chaque mois que 20 % de son capital accumulé. Le premier versement lui a été fait au 1er janvier 2015.

1. De quelle somme Pierre disposera-t-il encore au soir du 31 janvier 2015 ?
2. Soit (u_n) le capital dont dispose Pierre juste après le n-ième versement. Ainsi u_1 vaut 30 et u_5 correspond au capital acquis par Pierre le 1er mai 2015.

a. Montrer que $u_2 = 54$.

b. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 30$.

c. Compléter l'algorithme A suivant pour qu'il affiche le capital acquis le 1er avril 2015.

Initialisation
Affecter à i la valeur 1
Affecter à u la valeur 30
Traitement
Tant que ......
Affecter à u la valeur......
Affecter à i la valeur i + 1
Fin Tant que
Sortie
Afficher u

3. Compléter le tableau suivant donnant des termes de la suite (un) et conjecturer la limite de cette suite.

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
u_n										

4. Comment utiliser l'algorithme B suivant pour savoir à quel moment Pierre disposera d'au moins 149,90 euros ? quel résultat obtiendrait on ? A quelle date franchirait on le seuil ?

Initialisation
Affecter à i la valeur 1
Affecter à u la valeur 30
Saisir la valeur de p
Traitement
Tant que $|u - 150| > p$
Affecter à u la valeur $0{,}8\,u + 30$
Affecter à i la valeur $i + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher i

5. Pierre se rend compte qu'avec cette gestion de son argent de poche il ne pourra jamais s'offrir le téléphone de ses rêves. Exposez un plan de gestion de l'argent de poche qui permette à Pierre d'effectuer son achat dans l'année sans demander plus d'argent à ses parents.

Metropole juin 2014 SPCL / STI2D

Partie A :

$\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$ on a $f(t) = 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30$.

1. $f(0,5) = 35\mathrm{e}^{-0,8} - 30 \approx -14$ °C.
2. $f'(t) = -1,6 \times 35\mathrm{e}^{-1,6t} + 0 = -56\mathrm{e}^{-1,6t}$ or $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-1,6t} > 0$ et $-56 < 0$ donc $f'(t) < 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. La fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. $f(1,5) = 35\mathrm{e}^{-2,4} - 30 \approx -27$ °C. La température des ailerons sera conforme au cahier des charges.
4. $f(t) = -24 \iff 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30 = -24 \iff 35\mathrm{e}^{-1,6t} = 6 \iff \mathrm{e}^{-1,6t} = \dfrac{6}{35} \iff$ $\ln\left(\mathrm{e}^{-1,6t}\right) = \ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \iff -1,6t = \ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \iff t = -\dfrac{1}{1,6}\ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \iff$ $t = -0,625\ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \approx 1,10$.
   Les ailerons atteignent la température de -24 °C au bout de 1 h et 6 min.

Partie B :

$\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$ on a $y' + 1,5y = -52,5$.

1. $y' + 1,5y = -52,5 \iff y' = -1,5y - 52,5$ ce qui nous donne $y = K\mathrm{e}^{-1,5t} - \dfrac{52,5}{1,5} \iff y = K\mathrm{e}^{-1,5t} - 35$.
2. **a.** À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel donc $g(0) = 5$.

   b. $g(0) = 5 \iff K\mathrm{e}^{0} - 35 = 5 \iff K = 35 + 5 \iff K = 40$ donc $g(t) = 40\mathrm{e}^{-1,5t} - 35$.
3. $g(t) = -24 \iff 40\mathrm{e}^{-1,5t} - 35 = -24 \iff 40\mathrm{e}^{-1,5t} = 11 \iff \mathrm{e}^{-1,5t} = \dfrac{11}{40} \iff$ $\ln(\mathrm{e}^{-1,5t}) = \ln\left(\frac{11}{40}\right) \iff -1,5t = \ln\left(\frac{11}{40}\right) \iff t = -11,5\ln\left(\frac{6}{35}\right) \iff t = -\dfrac{2}{3}\ln\left(\frac{11}{40}\right) \approx$ $0,9944$.
   Les ailerons atteignent la température de -24 °C au bout de 1 h pile.
   Le tunnel permet une congélation un peu plus rapide

2)Nouvelle calédonie 19nov 2015

EXERCICE 2

Jusqu'à présent Pierre n'a encore jamais réussi à économiser un seul euro. Pour le responsabiliser dans la gestion de son argent de poche, ses parents décident de lui verser 30 euros tous les premiers du mois. Pierre décide que pour s'offrir le téléphone de ses rêves qui coûte 150 euros, il ne dépensera chaque mois que 20 % de son capital accumulé. Le premier versement lui a été fait au 1er janvier 2015.

1. Il a dépensé 20% des ses 30€ donc il a : $30\left(1-\frac{20}{100}\right)=30\times 0{,}8=24€$

2. Soit (u_n) le capital dont dispose Pierre juste après le n-ième versement. Ainsi u_1 vaut 30 et u_5 correspond au capital acquis par Pierre le 1er mai 2015.

a. $u_2=u_1\times\left(1-\frac{20}{100}\right)+30=24+30=54.$

b. au nième versement j'ai u_n alors pendant le mois qui suit on en dépense 20%, il reste donc $u_n 0{,}8$ puis on reçoit 30€ donc au versement suivant on a $u_{n+1}=0{,}8u_n+30.$

c. On veut u_4

Initialisation

Affecter à i la valeur 1

Affecter à u la valeur 30

Traitement

Tant que i<4

Affecter à u la valeur $0{,}8\,u+30$

Affecter à i la valeur i + 1

Fin Tant que

Sortie

Afficher u

3. Recopier et compléter le tableau suivant donnant des termes de la suite (un) et conjecturer la limite de cette suite.

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
u_n	148,62	148,89	149 ,11	149,29	149,43	149,55	149,64	149,71	149,77	149,81

4. Comment utiliser l'algorithme B suivant pour savoir à quel moment Pierre disposera d'au moins 149,90 euros ?

L'algorithme s'arrête quand l'écart entre u et 150 est plus petit que p.

Nous on veut dépasser 149,9 donc on veut un écart de 0,1 , on prendra donc $p=0{,}1$

Le résultat retourné sera 33 donc le 33ème mois : 2ans et 9mois soit le 1er septembre 2017

5. Pierre se rend compte qu'avec cette gestion de son argent de poche il ne pourra jamais s'offrir le téléphone de ses rêves. Exposez un plan de gestion de l'argent de poche qui permette à Pierre d'effectuer son achat dans l'année sans demander plus d'argent à ses parents.

Il pourrait s'autoriser à dépenser 10€ tous les mois et pourrait ainsi payer son portable en 8 mois, ou dépenser 20€ tous les mois s'il est disposé à attendre 15 mois pour son portable.