Chap 5 – La fonction logarithme népérien

Introduite en 1550 par l'écossais Neper sous forme de table numérique de correspondance qui transforme les produits en somme. Ne connaissant ni fonctions, ni limites, ni dérivées, il n'a donc pas pu définir exactement la fonction qui porte aujourd'hui son nom.

I. La fonction logarithme népérien :

1. Définition :

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[\,=\mathbb{R}_*^+$. Cela signifie que pour tout $a>0$, l'équation $e^x=a$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.

Définition 1: On appelle **logarithme népérien** la fonction admettant comme dérivée $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et associant à 1 l'image nulle.
Ainsi sur $]0;+\infty[$ $\quad ln'(x)=1/x$ et $ln(1)=0$

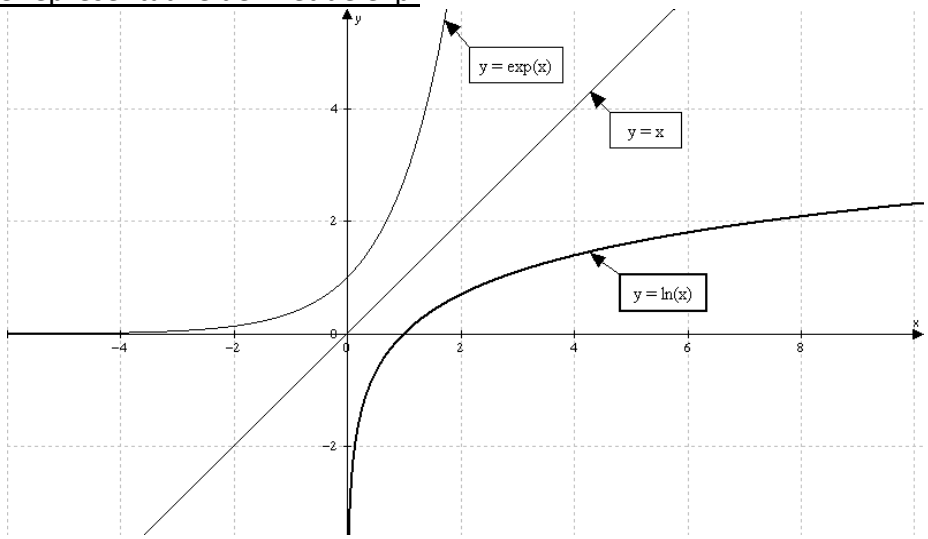
2. Etude de la fonction ln :

Propriété 3 :

- 1. ln est définie et continue sur $]0;+\infty[$
- 2. approximation affine de ln autour de 1: pour x petit, $\ln(1+x)=x+x\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x)=0$ donc $\mathbf{\ln(1+x)\approx x}$ **pour** $\boldsymbol{x}$ **petit**
- 3. ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Conséquence : pour $a,b>0$: $\boxed{a=b\ \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)}$ et $\boxed{a<b\ \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)}$

- 5. les courbes représentatives de ln et exp sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.
- 6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$
- 7. Signe de $\ln x$: $\boxed{\ln(x)>0\ \Leftrightarrow x>1}$ et $\boxed{\ln(x)<0\ \Leftrightarrow 0<x<1}$
- 8. Courbe représentative de ln et de exp:



Démonstration :

3. Propriété fondamentale du logarithme :

Propriété 4: Pour tout , $b>0$, $\mathbf{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}$

Démonstration :

Corollaire 5: *Propriétés de calcul du logarithme :* $a>0,\ b>0, n\in\mathbb{N}^*$:

$\ln(a^n)=n\ln(a)$ $\qquad$ $\ln(\sqrt[n]{a})=\frac{1}{n}\ln(a)$ $\qquad$ $\ln(a^{-n})=-\,n\ln a$

$\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$ $\qquad$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

Démonstration :

Exemple 1 : Exprimer ln(9), ln(12) et ln($\sqrt{12}$) en fonction de ln(2) et ln(3).

Propriété 6: Si f est une fonction dérivable telle que $f(ab) = f(a) + f(b)$ et que $f'(1) = 1$, alors f est la fonction logarithme népérien.

Démonstration :

Remarque : $f(ab) = f(a) + f(b)$ est donc la relation fonctionnelle caractéristique du logarithme.

4. Autres propriétés :

Propriété 7: Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur I, alors la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)' = (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Remarque : Composer une fonction u par la fonction $\ln$ ne change pas son sens de variation. (expliquer pourquoi). Donc u et $\ln \circ u$ ont même sens de variation (c'est aussi vrai pour u et $\exp(u)$).

Propriété 8 : *Formes indéterminées avec ln à connaitre :* $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \cdots$ (nombre dérivé de ln en 1) *croissances comparées :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Démonstration :

Exercice 2 : Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ grâce au changement de variable $X = x - 1$.

Corollaire 9 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$

Démonstration :

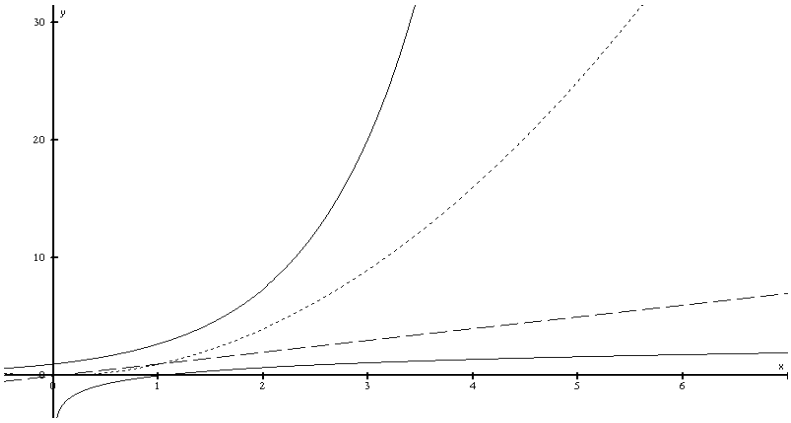
II. Croissances comparées des fonctions puissance, exponentielle et logarithme :

Les fonctions puissance $x \mapsto x^n$, exp et ln ont toutes pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Peut-on comparer leur vitesse de convergence ? Laquelle va tendre plus vite vers $+\infty$?

Rappel des limites obtenues par croissance comparée : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

On retiendra que **en +∞, les puissances l'emportent sur le logarithme. De même, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x**. On peut aussi dire que en $+\infty$, x^n tend vers $+\infty$ plus vite que ln et moins vite que exp.



Exercice 3 : En se servant des limites connues, déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + x}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{4x^3 - 1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 4x)\ln(x)$ $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 4x)\ln(x)$