

Entrainement au calcul de limites

Soit f la fonction qui à x associe le réel $\frac{7x-5}{x+3}$

- 1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f
- 2) Calculez les limites aux bornes de D_f
- 3) En déduire les asymptotes de C_f la courbe représentative de f

Correction :

1) $D_f =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

2) Il va falloir étudier les limites de f en $-\infty$; -3^- ; -3^+ et en $+\infty$

$$f(x) = \frac{7x-5}{x+3} = \frac{x(7-\frac{5}{x})}{x(1+\frac{3}{x})} = \frac{(7-\frac{5}{x})}{(1+\frac{3}{x})} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} x+3=0^- \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} 7x-5=-26 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} x+3=0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^+} 7x-5=-26 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$$

3) Nous aurons donc :

une asymptote horizontale d'équation $y=7$ et

une asymptote verticale d'équation $x=-3$

Soit g la fonction qui à x associe le réel $\frac{x^3-5}{x^2+3x-10}$

1) Déterminer D_g le domaine de définition de la fonction g

2) Calculez les limites aux bornes de D_g

3) déterminer a, b, c et d tels que $g(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+3x-10}$

4) En déduire les asymptotes de C_g la courbe représentative de g

Correction :

1) Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction g je dois savoir quand est ce que le polynôme au dénominateur s'annule.

$$\Delta = 9 - (-4) \times 10 = 49 = 7^2 \text{ et donc } x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2$$

$$\text{donc } x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$$

$$\text{ainsi } D_g =]-\infty; -5[\cup]-5; 2[\cup]2; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$$

2) Il va falloir étudier les limites de f en $-\infty$; -5^- ; -5^+ ; 2^- ; 2^+ et en $+\infty$

$$\frac{x^3-5}{x^2+3x-10} = \frac{x^3(1-\frac{5}{x^3})}{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2})} = x \frac{(1-\frac{5}{x^3})}{(1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2})} \text{ on a } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-\frac{5}{x^3})}{(1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-\frac{5}{x^3})}{(1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2})} = 1$$

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$g(x) = \frac{x^3-5}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{(x+5)} \times \frac{x^3-5}{(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} (x+5) = 0^- \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{1}{(x+5)} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x^3-5}{(x-2)} = \frac{-130}{-7} \text{ conclusion } \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{1}{(x+5)} \times \frac{x^3-5}{(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} (x+5) = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{1}{(x+5)} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x^3-5}{(x-2)} = \frac{-130}{-7} \text{ conclusion } \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{1}{(x+5)} \times \frac{x^3-5}{(x-2)} = +\infty$$

$$g(x) = \frac{x^3-5}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{(x-2)} \times \frac{x^3-5}{(x+5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0^- \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3-5}{(x+5)} = \frac{3}{7} \text{ conclusion } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)} \times \frac{x^3-5}{(x+5)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-5}{(x+5)} = \frac{3}{7} \text{ conclusion } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)} \times \frac{x^3-5}{(x+5)} = +\infty$$

3) soient a, b, c et d tels que $g(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+3x-10}$ donc $g(x) = \frac{(ax+b)(x^2+3x-10)+cx+d}{x^2+3x-10} = \frac{ax^3+(b+3a)x^2+(3b-10a+c)x+(d-10)}{x^2+3x-10}$

$$\text{Or } g(x) = \frac{x^3-5}{x^2+3x-10} \text{ donc on aura : } \begin{cases} a=1 \\ b+3a=0 \\ 3b-10a+c=0 \\ d-10b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ 3b-10a+c=0 \\ d=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=19 \\ d=-35 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } g(x) = x - 3 + \frac{19x-35}{x^2+3x-10} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (x-3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{19x-35}{x^2+3x-10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(19-\frac{35}{x})}{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \frac{(19-\frac{35}{x})}{(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2})} = 0$$

De la même manière on peut montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x-3)] = 0$ donc $y = x - 3$ sera une asymptote oblique pour la courbe C_g

Les droites d'équation $x = 2$ et $x = -5$ sont les équations des asymptotes verticales de la courbe.