gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

Chap 6. Primitives

I. Les primitives d'une fonction

Définition.
Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Une fonction F définie et dérivable sur I est une **primitive** de *f* sur lorsque F'=*f*.

Exemple.
Donner une primitive de $f(x) = 2x$, par exemple $\mathrm{F}(x) = x^2 + 3$

Théorème.
Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Théorème.
Si *f* est une fonction dérivable sur un intervalle I et F une primitive de *f*, alors *f* admet une infinité de primitives de la forme x $\mapsto \mathrm{F}(x) + c$ où c est une constante.

Conséquence.
Si *f* est une fonction dérivable sur un intervalle I. Il existe une unique primitive de *f* prenant la valeur y_0 en x_0.

Exemples.
□ Déterminer les primitives de $f(x) = x - 4$.

F(x) = ½x² - 4x + c

□ Déterminer la primitive de $f(x) = x^2 - 4x + 1$ qui vaut 2 en 0.

$\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + c$ donc $\mathrm{F}(x) = \frac{0^3}{3} - 2 \times 0^2 + 0 + c = c$

or on veut que $\mathrm{F}(0) = 2$ donc $c = 2$

II. Primitives des fonctions usuelles

Fonction *f*	**Domaine de définition**	**Primitives F de *f* avec $k \in \mathbb{R}$**
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{F}(x) = ax + k$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{F}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$\mathrm{F}(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$	$\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{F}(x) = \sin x + k$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{F}(x) = -\cos x + k$

III. Opérations sur les primitives

Propriétés.

 Si F et G sont des primitives de *f* et *g* sur un intervalle I alors F+G est une primitive de *f*+*g* sur I.
 Si F est une primitive de *f* sur un intervalle I et α un nombre réel alors αF est une primitive de α*f*.

Fonction *f*	**Primitives F de *f* avec *k*∈ ℝ**
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F(x) = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + k$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$
$f(x) = u'(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a}u(ax+b) + k$
$f(x) = u'(x) \times [u(x)]^n$, $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1} + k$
$f(x) = \frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$ $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)[u(x)]^{n-1}} + k$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + k$

Exemples.

▶1. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$f(x) = 4x^2 + x + 2$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x + 1$

$f(x) = \frac{-6}{\sqrt{2x+1}} = (-3) \times \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$ sur $\left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$ $\quad$ $F(x) = (-3) \times 2\sqrt{2x+1} = -6\sqrt{2x+1}$

▶2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{5}{x^3} = 5 \times \frac{1}{x^3}$ sur $]0, +\infty[$ $\quad$ $F(x) = 5 \times \frac{-1}{2x^2} + k = \frac{-5}{2x^2} + k$, $k \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $F(x) = \frac{-1}{5}\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + k$, $k \in \mathbb{R}$

▶3. Déterminer la primitive F de *f* telle que F(–2) = 0.

$f(x) = (3x+5)^4 = \frac{1}{3} \times 3(3x+5)^4$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}(3x+5)^5 = \frac{1}{15}(3x+5)^5 + k$, $k \in \mathbb{R}$

or $F(-2) = \frac{-1}{15} + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{15}$ donc $F(x) = \frac{1}{15}(3x+5)^5 + \frac{1}{15}$

▶4. Déterminer la primitive G de *g* telle que G(0) = $\frac{1}{4}$.

$g(x) = \frac{1}{(4x-1)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{(4x-1)^2}$ sur $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$ $\quad$ $G(x) = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{(4x-1)} + k = \frac{-1}{4(4x-1)} + k$, $k \in \mathbb{R}$

or $G(0) = \frac{1}{4} + k = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad k = 0$ donc $G(x) = \frac{-1}{4(4x-1)}$