gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

Chap 6. La fonction logarithme népérien

I. La fonction logarithme népérien

Définition.
On appelle **logarithme népérien** la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur]0,+∞[s'annulant pour $x = 1$. On note cette fonction $x \mapsto \ln x$.
Donc, par définition :

- $\ln x$ est définie pour $x > 0$.
- $\ln 1 = 0$
- la fonction ln est dérivable sur]0,+∞[et pour tout $x > 0$, $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Théorème.
Pour tout $a > 0$ et $b > 0$
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ *i.e.* ln transforme un produit en somme.
Démonstration.
On fixe $a > 0$ et on considère la fonction composée $f_a(x) = \ln(ax)$: $x \mapsto ax \mapsto \ln(ax)$
f_a est dérivable sur]0,+∞[et $f'_a(x) = \frac{1}{ax} \times a = \frac{1}{x}$. $f_a(x)$ est donc une primitive de $\frac{1}{x}$, comme $\ln x$.
$f_a(x)$ et $\ln x$ ne diffère donc que d'une constante soit $f_a(x) = \ln(x) + k$ pour $x > 0$.
En particulier pour $x = 1$, $f_a(1) = \ln(a \times 1) = \ln(a)$ et $f_a(1) = \ln(1) + k = k$
On en déduit que $k = \ln(a)$. Par conséquent $f_a(x) = \ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$.

Propriétés.
Pour tout $a > 0$, $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

□ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$	car $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln(1) = 0$
□ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	car $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
□ $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$	car pour $n = 2$, $\ln(a^2) = \ln(a \times a) = \ln(a) + \ln(a) = 2\ln(a)$
□ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)$	car $\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$

II. Variations et courbe

Théorème.
La fonction logarithme est strictement croissante sur]0,+∞[.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$. L'axe des abscisses est une asymptote verticale à la courbe de ln.

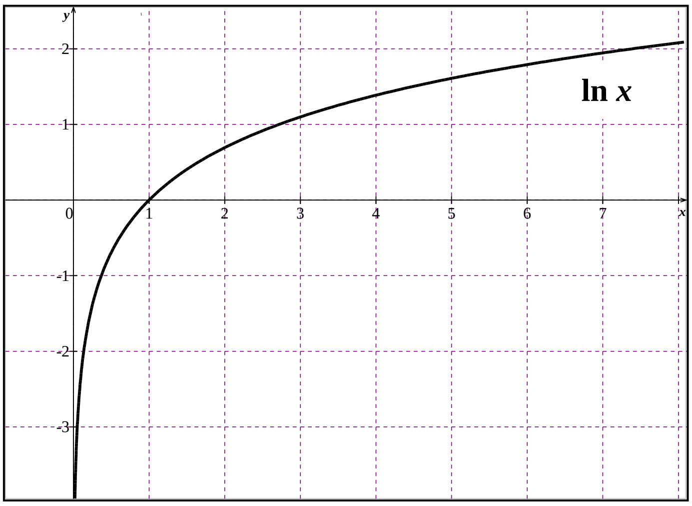
x	0		1		$+\infty$
$\ln' x = \frac{1}{x}$			+		
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	−	0	+	

Démonstration.

- $\ln' x = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on peut écrire x en notation scientifique $x = a \times 10^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq a < 10$ alors $\ln(x) = \ln(a \times 10^n) = \ln(a) + n\ln(10)$
or lorsque x tend vers $+\infty$, n tend aussi vers $+\infty$, de plus $\ln(10)>0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(a) + n\ln(10) = +\infty$
- $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to\ 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\ 0^+} \ln(x) = -\lim\limits_{x\to\ 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$

Courbe de la fonction ln.



Conséquences.

Pour tous nombres réels a et b, $a > 0$ et $b > 0$

- $\ln a = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
- $\ln a \leq \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$
- $\ln a < ln b \quad \Leftrightarrow \quad a < b$

Exemple.

Résoudre $\ln(x^2 + 1) = 0$

$\ln(x^2 + 1) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Théorème des croissances comparées.

Soit $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

III. Dérivation et approximation

Théorème.

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $]0,+\infty[$ i.e. $u \ : \ x \in \mathrm{I} \mapsto u(x) \in]0,+\infty[$ alors $f(x) = \ln[u(x)] = \ln \circ u(x)$ est définie et dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemples.

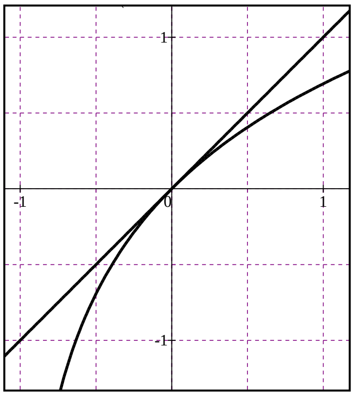
▶1. Soit la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$$

▶2. Soit la fonction $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer les primitives de f.

$\mathrm{F}(x) = \ln(x^2 + 1) + k$ où k est une constante réelle.

Remarque.
Soit la fonction $f \; : \; h \mapsto \ln(1+h)$ sur]–1,+∞[
$f'(h) = \frac{1}{1+h}$, la tangente de f en $h = 0$ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
donc $y = x$.
Cela signifie que lorsque h est très proche de 0, la fonction $f(h) = \ln(1+h)$ peut être approximer par la fonction linéaire $g(h) = h$.



Conséquence.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$$

V. Equations et inéquations

Définition.
e est l'unique nombre réel tel que ln e =1, $e \in]0,+\infty[$
avec une calculatrice : $e \approx 2{,}718$

Propriété.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \ln e^n = n$
Démonstration.

$$\ln e^n = n \ln e = n \times 1 = n$$

Exemples.
▶1. Résoudre $\ln(x-4) = 5$.
$\ln(x-4)$ n'est définie que pour $x > 4$.
$\ln(x-4) = \ln e^5 \quad \Leftrightarrow \quad x - 4 = e^5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^5 + 4$ donc $s = \{e^5 + 4\}$

▶2. Résoudre $\ln(x-3) \leq 2$.
$\ln(x-3)$ n'est définie que pour $x > 3$.
$\ln(x-3) \leq \ln e^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x - 3 \leq e^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < x \leq e^2 + 3$ donc $s =]3, e^2 + 3]$