Correction d'exercices sur les logarithmes Népériens

Exercice 31P250

a) ln x = 1 ln étant définie que si $x \in]0;+\infty[$ le domaine d'étude sera : $D_e =]0;+\infty[$

sur D_e on aura : ln(x) = 1 ⇔ ln(x) = ln (e) ⇔ x = e or $e \in D_e$ donc S = {e}

b) ln 2x = 3 $2x \in]0;+\infty[$ ⇔ $x \in]0;+\infty[$ donc $D_e =]0;+\infty[$

sur D_e on aura : ln(2x) = 3 ⇔ ln(2x) = ln (e^3) ⇔ 2x = e^3 ⇔ x= $\frac{e^3}{2}$ or $\frac{e^3}{2} \in D_e$ donc S = $\left\{\frac{e^3}{2}\right\}$

c) ln (3-5x) = 2 on veut 3 – 5x > 0 donc 3> 5x et donc $\frac{3}{5} > x$

ainsi le domaine d'étude sera : $D_e =]-\infty;\frac{3}{5}[$

sur D_e on aura : ln(3-5x) = 2 ⇔ ln(3-5x) = ln (e^2) ⇔ 3-5x = e^2 ⇔ x= $\frac{3-e^2}{5}$or $\frac{3-e^2}{5} \in D_e$ donc S = $\left\{\frac{3-e^2}{5}\right\}$

d) ln 3x = -0,5 $3x > 0$ ⇔ $x > 0$ donc $D_e =]0;+\infty[$

sur D_e on aura : ln(3x) = -0,5 ⇔ ln(3x) = ln $(e^{-0,5})$ ⇔ 3x = $e^{-0,5}$ ⇔ x= $\frac{e^{-0,5}}{3}$ or $\frac{e^{-0,5}}{3} \in D_e$ donc S = $\left\{\frac{e^{-0,5}}{3}\right\}$

Exercice 32P250

a) ln (x-1) + ln(x+1) = 0 on doit avoir x-1 > 0 et x+1>0 (en même temps) donc $D_e =]1;+\infty[$

sur D_e on aura : ln (x-1) + ln(x+1) = 0 ⇔ ln (x-1) + ln(x+1) = ln(1) ⇔ ln [(x-1)(x+1)] = ln(1)

⇔ (x-1)(x+1) = 1 ⇔ x^2-1 = 1 ⇔ x^2 = 2 ⇔ x = $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$ or de ces deux valeurs seule $\sqrt{2}$ est dans D_e donc S = $\{\sqrt{2}\}$

b) ln $\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$ on doit avoir $\frac{x-1}{x+1} > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x-1		-		-	0	-	
x+1		-	0	+		+	
$\frac{x-1}{x+1}$		+	0	-	0	+	

Donc $D_e =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

Sur D_e on a : ln $\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$ ⇔ ln $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ = ln(e) ⇔ $\frac{x-1}{x+1}$ = e ⇔ x-1 = e(x+1) ⇔ x – x e = 1 + e

⇔ x(1 – e) = 1 + e ⇔$x = \frac{1+e}{1-e}$ or $\frac{1+e}{1-e} \approx -2,16$ donc $\frac{1+e}{1-e} \in D_e$ donc S = $\left\{\frac{1+e}{1-e}\right\}$

Exercice 33P250

a) ln (x^2-4) = ln(5) +2ln(3) on doit avoir x^2-4 > 0 et donc que x<-2, x>2 (en même temps)

donc $D_e =]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Sur D_e ln (x^2-4) = ln(5) +2ln(3) ⇔ ln (x^2-4) = ln(5) +ln(3^2) ⇔ ln (x^2-4) = ln(5×3^2)

⇔ x^2-4 = 5×3^2 ⇔ x^2 - 49 =0 ⇔ x^2 - 7^2 = 0 ⇔ (x-7)(x+7)=0 ⇔ x vaut 7 ou -7

Ces deux valeurs étant dans on D_e , on aura S={-7 ;7}

Exercice 36P250

2(ln x)^2+ln x - 1 = 0 ln étant définie que si $x \in]0;+\infty[$ le domaine d'étude sera : $D_e =]0;+\infty[$

on n'a pas de formule pour les produits de logarithmes, il nous faut donc une approche différentes : on posera X=ln(x), sur D_e on aura 2(ln x)^2+ln x - 1 = 0 ⇔ $\begin{cases} X=\ln(x) \\ 2X^2 + X - 1 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$ $x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$ et $x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ donc

2(ln x)^2+ln x - 1 = 0 ⇔ $\begin{cases} X=\ln(x) \\ X=-1 \text{ ou } \frac{1}{2} \end{cases}$ ⇔ $x = e^{-1}$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$

Exercice 38P251

ln (3-x) + 1 ≥ 0 ; 3 – x > 0 ⇔ 3> x donc $D_e =]-\infty;3[$

Sur D_e ln (3-x) + 1 ≥ 0 ⇔ ln$(3-x)$ ≥-1 ⇔ ln$(3-x) \geq$ ln(e^{-1}) ⇔ $3 - x \geq e^{-1}$

⇔ $3 - e^{-1} \geq x$ ⇔ $x \in]-\infty;3-e^{-1}]$

Or $]-\infty; 3-e^{-1}] \subset]-\infty; 3[$ donc $S =]-\infty; 3-e^{-1}]$

$$\begin{cases} x+y=9 \\ X = -1 \text{ ou } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 45P251

f est définie par f(x)=ln(2x+1) sur $D_f =]\frac{-1}{2}; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+}(2x+1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+}\ln(2x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x+1) = +\infty$

Exercice 46P251

f est définie par f(x)=ln($\frac{2x+1}{x-1}$) sur $D_f =]1; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0^+$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1) = 3$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x-1} = +\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = +\infty$

$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 2$ or $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x) = \ln(2)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \ln(2)$

Exercice 48P251

f(x)=x^2ln(x) est dérivable sur son ensemble de définition $D_f =]0; +\infty[$ car c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

f'(x) = 2xln(x) + $x^2\frac{1}{x}$ = x+ 2xln(x) = x (1+Ln(x))

Exercice 53P251

x		-2		4	
4-x	+		+	0	-
x+2	-	0	+		+
$\frac{x+2}{4-x}$	-	0	+	0	-

f(x) = $\ln\left(\frac{x+2}{4-x}\right)$

$\left(\frac{x+2}{4-x}\right)' = \frac{1(4-x)-(x+2)(-1)}{(4-x)^2} = \frac{4-x+x+2}{(4-x)^2} = \frac{6}{(4-x)^2}$

Donc f'(x) = $\frac{\frac{6}{(4-x)^2}}{\frac{x+2}{4-x}} = \frac{6}{(x+2)(4-x)}$

Exercice 54 P252

$f(x) = \frac{-4}{x-1} = -4 \times \frac{1}{x-1}$

si on pose u(x) = x-1 on aura u'(x) = 1 et donc on peut considérer que $f(x) = -4 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

et donc $F(x) = -4 \times \ln(u(x)) + c = -4 \times \ln(x-1) + c$

Exercice 55P252

$f(x) = \frac{-4}{2x-1} = -2 \times \frac{2}{2x-1}$

si on pose u(x) = 2x-1 on aura u'(x) = 2 et donc on peut considérer que $f(x) = -2 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

et donc $F(x) = -2 \times \ln(u(x)) + c = -2 \times \ln(2x-1) + c$