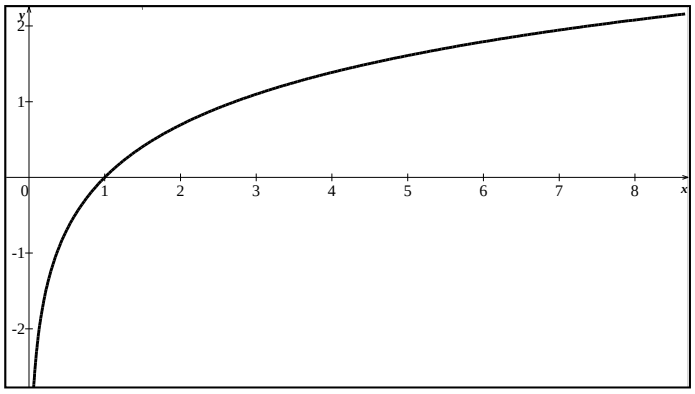
gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

Chap 8. La fonction exponentielle

I. La fonction exponentielle



Rappel.
On rappelle que la fonction logarithme népérien est définie et dérivable sur]0,+∞[.
Pour tout x de]0,+∞[, $\ln' x = \frac{1}{x} > 0$ donc ln x est strictement croissante, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

Définition.
Soit $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = \ln x$, d'inconnue x, admet une solution unique notée $\exp(y) = e^y$.
On définit ainsi la fonction exponentielle notée $\begin{array}{l} \text{Exp} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[\\ y \mapsto \exp(y) = e^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln x \end{array}$

Exemple.
e^0 est la solution de l'équation $\ln x = 0$ donc $e^0 = 1$
e^1 est la solution de l'équation $\ln x = 1$ donc $e^1 = e$ la constante de Neper.

Propriété.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $\ln(e^x) = x$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$.
On dit que les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre.

Propriété.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$ *i.e.* exp transforme une somme en produit.

Démonstration.
$e^a = \mathrm{A}$ et $e^b = \mathrm{B}$ donc $a = \ln\mathrm{A}$ et $b = \ln\mathrm{B}$

$$e^{a+b} = e^{\ln\mathrm{A}+\ln\mathrm{B}} = e^{\ln(\mathrm{A}\times\mathrm{B})} = \mathrm{A}\times\mathrm{B} = e^a \times e^b$$

Conséquences.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad$ et $\quad (e^a)^n = e^{na}$

II. Variations et courbe

Théorème. Dérivation de l'exponentielle.
La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$, en dérivant $\frac{(e^x)'}{e^x} = 1$ et donc $(e^x)' = e^x$.

Conséquence.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $(e^x)' = e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème. Limites de l'exponentielle.
$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$, la courbe de l'exponentielle admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Chap 8. La fonction exponentielle

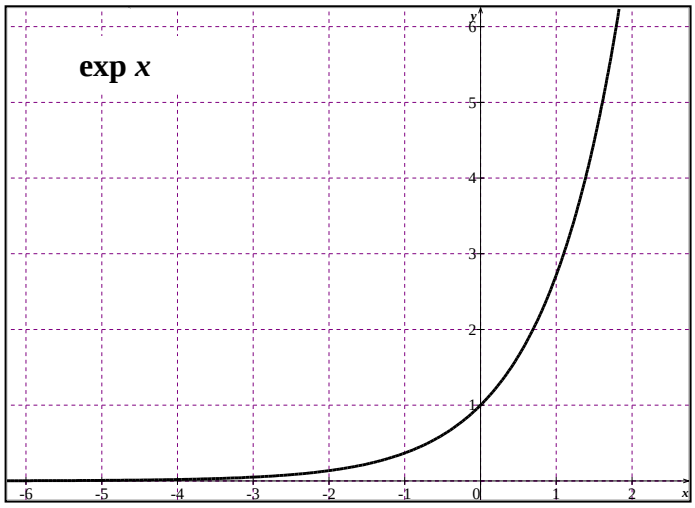
Tableau de variations.

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

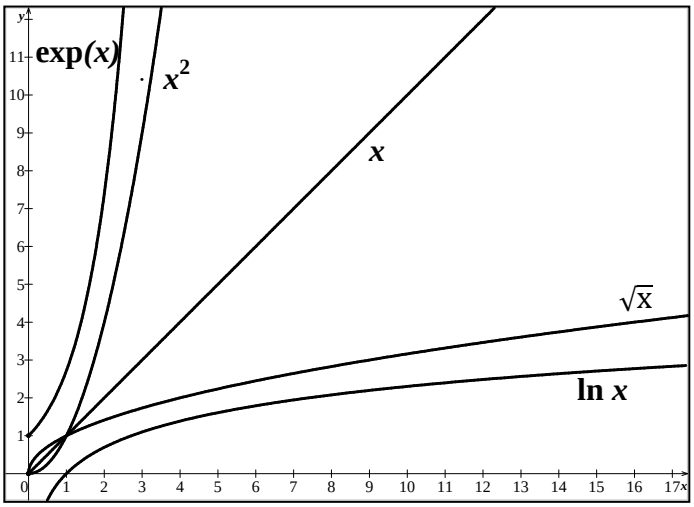
donc

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x		$+$	

Courbe de la fonction exponentielle.



(parler un peu plus de la symétrie entre les courbes de exp(x) et ln(x) par rapport à la droite d'équation y=x)



Théorème. Croissances comparées.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

Exemple.

Déterminer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^2)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+7)e^x$

$e^x - x^2 = x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^2) = +\infty$

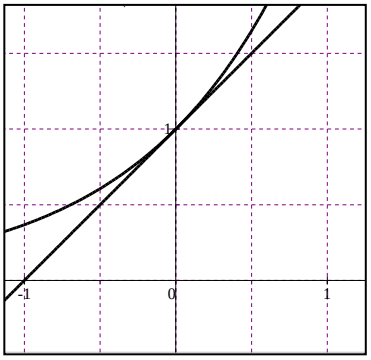
$(2x+7)e^x = 2xe^x + 7e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+7)e^x = 0$

Chap 8. La fonction exponentielle

III. Dérivation et approximation de l'exponentielle

Théorème.
Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors $f(x) = e^{u(x)} = \exp \circ u(x)$ est définie et dérivable sur I et $f'(x) = \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$.

Exemples.
▶1. Soit la fonction $f(x) = e^{x^2-5x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer$f'(x)$.
$f'(x) = (2x-5)e^{x^2-5x+1}$
▶2. Soit la fonction $g(x) = xe^{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer les primitives de g.
$g(x) = \frac{1}{2} \times \left(2xe^{x^2}\right)$ donc $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$ où k est une constante réelle.



Remarque.
Soit la fonction exponentielle $f \ : \ x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = e^x$, la tangente de f en $x = 0$ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
donc $y = e^0(x-0) + e^0 = x + 1$.
Cela signifie que lorsque x est très proche de 0, la fonction $f(x) = e^x$ peut être approximé par la fonction affine $g(x) = x + 1$.

IV. Les fonctions puissances

Remarque.
Pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$: $a^n = e^{\ln a^n} = e^{n \times \ln a}$

Définition.
Soit $a > 0$ et x un nombre réel, on convient de définir a^x par $a^x = e^{x \ln a}$

Exemple.
$5^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \times \ln 5} = e^{\ln\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, $\quad 8^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \times \ln 8} = e^{\frac{1}{3} \times \ln 2^3} = e^{\ln 2} = 2 = \sqrt[3]{8}$, $\quad 6^{-2,4} = e^{-2,4 \times \ln 6} = \frac{1}{e^{2,4 \times \ln 6}} \approx 0{,}01357$

Conséquence.
Soit $a > 0$ et x un nombre réel, $\ln a^x = x \ln a$.

Définition.
Pour tout réel α, la fonction f_α définie sur $]0,+\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est appelée **fonction puissance** α.

Exemple.
Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = e^{\ln\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ c'est la fonction racine carrée sur $]0,+\infty[$.

Propriétés.
- Sur $]0,+\infty[$ $f'_\alpha(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha \ln x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = \lim\limits_{x \to 0} e^{\alpha \ln x} = 0$

Si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0} e^{\alpha\ln x} = +\infty$

Démonstration.

Sur $]0,+\infty[$ $f'_\alpha(x) = \left(e^{\alpha\ln x}\right)' = e^{\alpha\ln x} \times \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \times \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\ln x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \alpha\ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$

Si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \alpha\ln x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$

Tableau de variations.

Cas $\alpha > 0$:

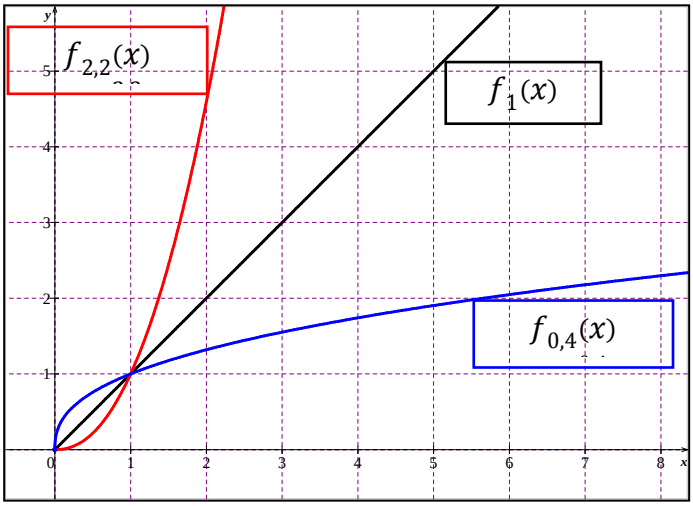
x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$+$	
$f_\alpha(x) = x^\alpha$	0 ↗	$+\infty$

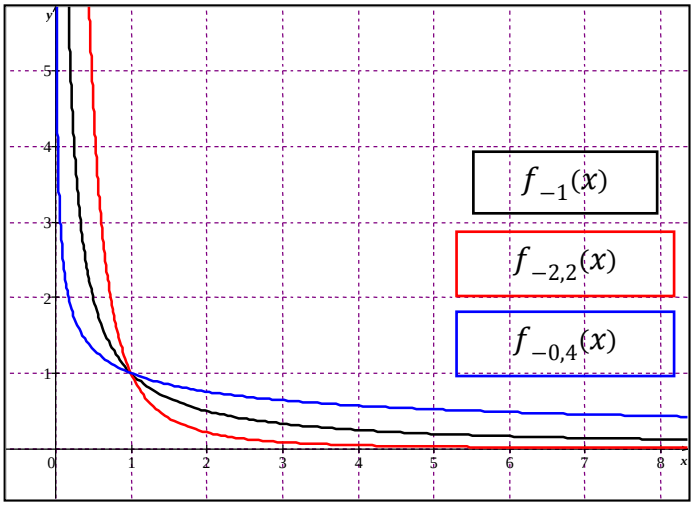
Cas $\alpha < 0$:

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$-$	
$f_\alpha(x) = x^\alpha$	$+\infty$ ↘	0

Théorème. Croissances comparées.

$\alpha > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$ (autrement dit $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$





Définition.

Soit n entier strictement positif

Pour $\alpha = \frac{1}{n}$ et $x > 0$, $f_{\frac{1}{n}}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ c'est la fonction ***racine n^ième***.

$x > 0$ et $y > 0$: $y = \sqrt[n]{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^n = x$.