Chap 3. Les suites

I. Généralités sur les suites

Définition. Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

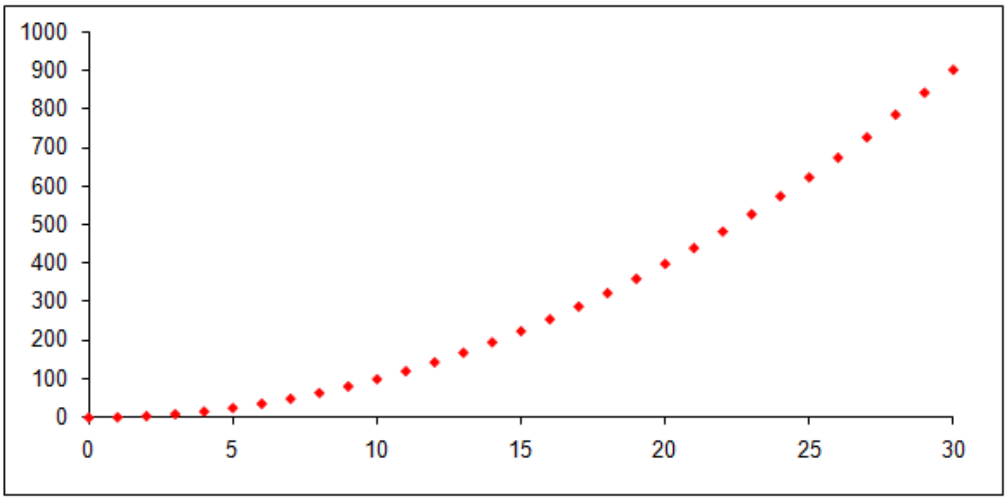
$$u \ : \quad n \in \mathbb{N} \mapsto u(n) = u_n \in \mathbb{R}$$

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général u_n et de premier terme u_0.
u_n s'appelle le terme de rang n.

Exemples.

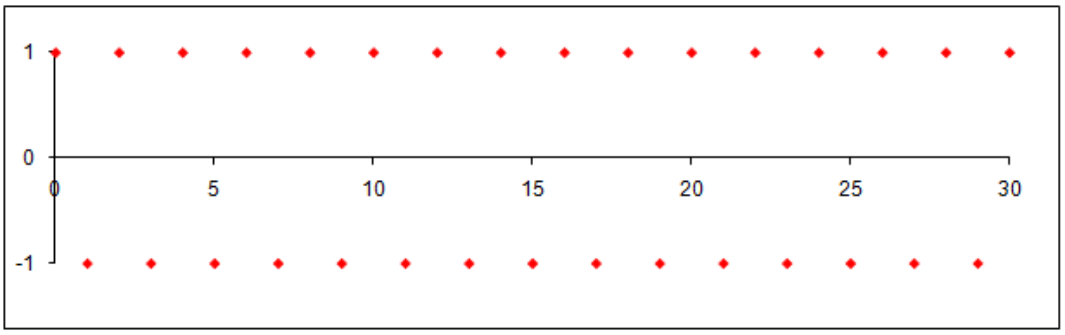
▶1. La suite des carrés $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u \ : \quad n \in N \mapsto u(n) = u_n = n^2$

n	0	1	2	3	4	5	…
$u_n = n^2$	0	1	4	9	16	25	…
	$u_0 = 0$	$u_1 = 1$	$u_2 = 4$	$u_3 = 9$	$u_4 = 16$	$u_5 = 25$	



▶2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par $u \ : \quad n \in N \mapsto u(n) = u_n = (-1)^n$

n	0	1	2	3	4	5	…
$u_n = (-1)^n$	1	–1	1	–1	1	–1	…
	$u_0 = 1$	$u_1 = -1$	$u_2 = 1$	$u_3 = -1$	$u_4 = 1$	$u_5 = -1$	



Remarque. On peut définir une suite de deux façons :
- par une formule littérale : $u_n = f(n)$, on donne la formule qui calcule u_n à chaque rang n.
- par une formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0, on donne la formule qui permet de passer d'un terme au suivant (appelée formule de récurrence) et on donne le premier terme.

Exemple.
La suite des nombres entiers impairs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = 2n+1$ pour tout $n\in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	…
u_n	1	3	5	7	9	11	…
	$u_0=1$	$u_1=3$	$u_2=5$	$u_3=7$	$u_4=9$	$u_5=11$	

+2 +2 +2 +2 +2

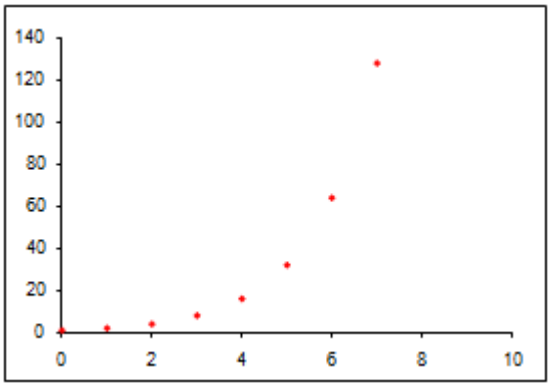
On peut aussi définir cette suite par la formule de récurrence $u_{n+1}= u_n + 2$ et $u_0 = 1$. Le terme de rang $n+1$ se calcule en prenant le terme précédent c'est à dire de rang n et en ajoutant 2.

Définition.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite,

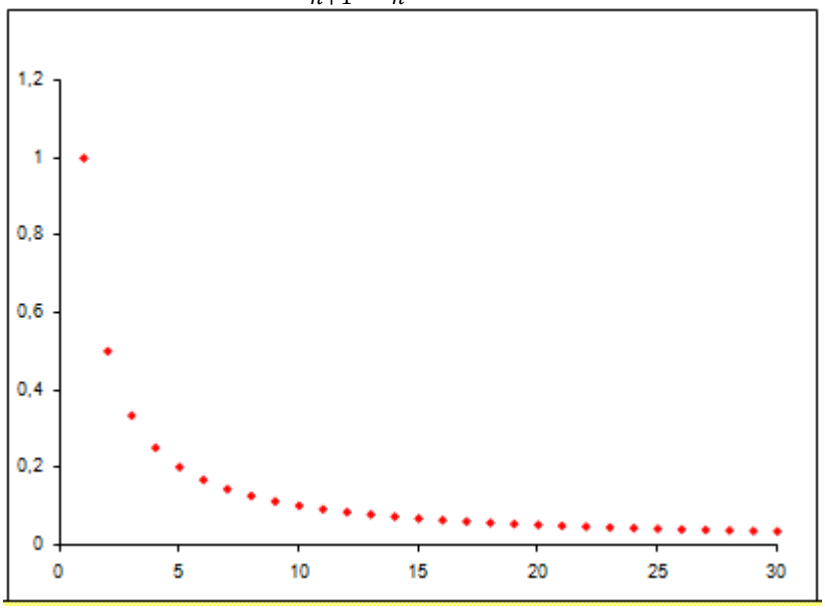
- La suite est dite **croissante** lorsque pour tout $n\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$
- La suite est dite **strictement croissante** lorsque pour tout $n\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$
- La suite est dite **décroissante** lorsque pour tout $n\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$
- La suite est dite **strictement décroissante** lorsque pour tout $n\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$

Exemples.

►1. La suite des puissances de 2, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = 2^n$ pour tout $n\in \mathbb{N}$
$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8$, $u_4 = 16$, $u_5 = 32$ …
Pour tout $n\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n > u_n$, la suite des puissances de 2 est une suite strictement croissante.



►2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie pour tout $n\in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{n}$.
$v_1 = \frac{1}{1} = 1$, $v_2 = \frac{1}{2}$, $v_3 = \frac{1}{3}$, $v_4 = \frac{1}{4}$, $v_5 = \frac{1}{5}$, …
Pour tout $n\in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = v_n$ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.



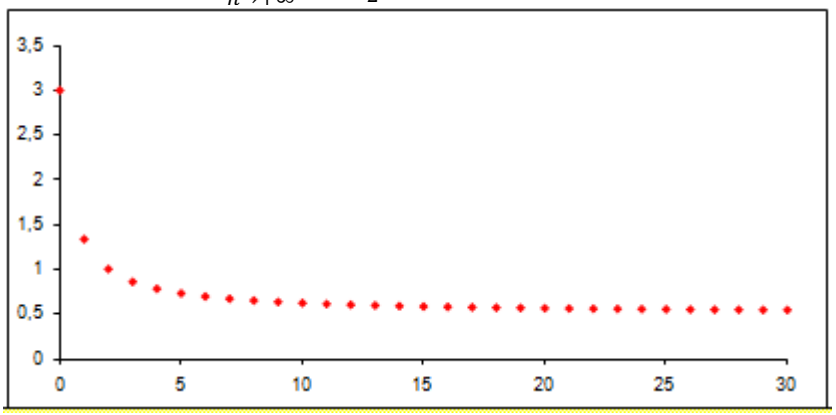
II. Limites des suites

Nous étudions le comportement de la suite lorsque n prend des valeurs très grandes, c'est à dire lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemples.
$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Théorème.
Si une fonction f admet une limite L en $+\infty$ alors la suite définie par $u_n = f(n)$ admet pour limite L en $+\infty$.

Exemple.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = \frac{n+3}{2n+1}$ pour tout $n\in \mathbb{N}$.
Soit $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ alors $u_n = f(n)$.
$f(x) = \frac{x+3}{2x+1} = \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.



III. Les suites arithmétiques

Définition. Une suite **arithmétique** est une suite numérique telle que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même réel : $u_{n+1} = u_n + a$ pour tout n.
Cette constante, notée a, est appelée **raison** de la suite.

Méthode. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on vérifie que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Exemples.
▶1. La suite des nombres impairs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = 2n+1$ pour tout $n\in \mathbb{N}$, est-elle arithmétique ?
$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2$ donc la suite $(u_n)_{n\in\square}$ est arithmétique de raison 2.
▶2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $v_n = n^2 - 2$ pour tout $n\in \mathbb{N}$, est-elle arithmétique ?
$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - 2 - (n^2 - 2) = n^2 + 2n + 1 - 2 - n^2 + 2 = 2n + 1$ or $2n + 1$ n'est pas constant lorsque n varie donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.
$v_0 = -2$, $v_1 = -1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 7$, $v_4 = 14$, $v_5 = 23$ …

Théorème.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison a et de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 + na$ pour tout $n\in \mathbb{N}$.

Théorème.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite arithmétique alors la somme de termes consécutifs est donnée par

$$\text{Somme des termes} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Exemples.
►1. La somme des n premiers nombres entiers $S = 0 + 1 + 2 + \ldots + n$ où $u_n = n$ pour tout $n\in \mathbb{N}$,
$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0+u_n}{2}$ où $u_0 = 0$ et $u_n = n$ donc $S = 0 + 1 + \ldots + n = (n+1) \times \frac{0+n}{2}$

$$\boxed{1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

►2. Monsieur R. a versé 100 euros à l'ouverture du compte puis il rajoute 100 euros chaque mois.
On note u_n la somme dont dispose Monsieur R. au bout de la *n-ième* année et $u_0 = 100$.
Calculer u_1, u_2 et u_3 : $u_1 = 1300$, $u_2=2500$ et $u_3 = 3700$.
Exprimer u_n en fonction de n : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite arithmétique de raison 1200 car $u_{n+1} = u_n + 1200$ donc $u_n = u_0 + 1200n = 100+1200n$ pour tout n.
Quel est le montant dont dispose Monsieur R. au bout de 5 ans ? $u_5 = 6100$.
Au bout de combien d'année, Monsieur R. peut-il s'acheter une voiture 10 000€ ?
$u_n = 100+1200n \geq 10\,000$ donc $n \geq 8{,}25$ soit au bout de 9 années.

IV. Les suites géométriques

Définition.
Une suite **géométrique** est une suite numérique telle que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours le même réel b : $u_{n+1} = b \times u_n$ pour tout $n\in \mathbb{N}$.
Cette constante notée b est appelée **raison** de la suite.

Méthode. Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on vérifie que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.
Exemples.
►1. La suite des puissances de 3 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = 3^n$ pour tout $n\in \mathbb{N}$, est-elle géométrique ?
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est géométrique de raison 2.
►2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $v_n = \sqrt{n}$ pour tout $n\in \mathbb{N}$, est-elle géométrique ?
$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$ or $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ n'est pas constant lorsque n varie donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.
$v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = \sqrt{2}$, $v_3 = \sqrt{3}$, $v_4 = \sqrt{4} = 2$, $v_5 = \sqrt{5}\ldots$

Théorème.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison b et de premier terme u_0 alors $u_n = u_0 \times b^n$ pour tout $n\in \mathbb{N}$.

Exemple.
Monsieur R. a placé 1000 sur son compte épargne rémunéré à 4%.
On note u_n la somme dont dispose Monsieur R. au bout de la *n-ième* année et $u_0 = 1000$.
Calculer u_1, u_2 et u_3 : $u_1 = 1000\times1{,}04=1040$, $u_2=1040\times1{,}04=1081{,}6$ et $u_3 = 1124{,}864$.

Exprimer u_n en fonction de n : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 1,04 car $u_{n+1} = u_n \times 1{,}04$ donc $u_n = u_0 \times 1{,}04^n = 1000 \times 1{,}04^n$ pour tout n.
Quel est le montant dont dispose Monsieur R. au bout de 5 ans ? $u_5 = 1000 \times 1{,}04^5 \approx 1216{,}65$.
Au bout de combien d'année, Monsieur R. a-t-il au moins doublé son épargne ?
$u_n = 1000 \times 1{,}04^n \geq 2000$ donc $n \geq 17{,}67$ soit au bout de 18 années.

Théorème.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $b \neq 1$ alors la somme de termes consécutifs est donnée par $\text{Somme des termes} = \text{premier terme} \times \frac{1-(\text{raison})^{\text{nombre termes}}}{1-\text{raison}}$

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$$

Exemples.
▶1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison b et de premier terme 1,
si $b \neq 1$ alors $u_n = b^n$ pour tout n donc $\mathrm{S} = 1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$
si $b = 1$ alors $u_n = 1$ pour tout n donc $\mathrm{S} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n+1 fois} = n+1$

▶2. La somme des 20 premières puissances de 3 : $\mathrm{S} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{19}$ où $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 1$ donc $\mathrm{S} = 1 \times \frac{1-3^{19+1}}{1-3} = \frac{1-3^{20}}{-2} = \frac{3^{20}-1}{2} = 1\ 743\ 392\ 200.$

Théorème.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0
Si $q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
Si $q = 1$ alors la suite est constante égale à u_0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$
Si $q = -1$ alors $u_n = u_0 \times (-1)^n$ pour tout n donc la suite n'a pas de limite.
Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ selon le signe de u_0.