gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

Chap 4. Etude de fonctions, dérivation

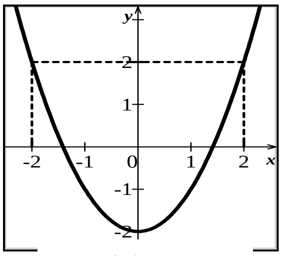
I. Généralités sur les fonctions

Définition. Le **domaine de définition** d'une fonction est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'image $f(x)$ existe. On le note D_f.

Méthode.
- s'il y a des quotients, on résout dénominateur = 0 pour trouver les valeurs interdites.
- s'il y a des racines carrées, on résout radical ≥ 0.

Définition. Une fonction f est dite **paire** lorsque pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Propriété. Si la fonction f est paire alors sa courbe C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

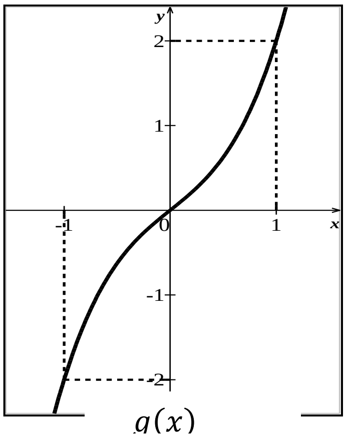


$f(x)$

Exemple.
La fonction $f \ : \ x \mapsto f(x) = x^2 - 2$ est-elle paire ?
On calcule $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$, la fonction f est paire.

Définition. Une fonction f est dite **impaire** lorsque pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Propriété. Si la fonction f est impaire alors sa courbe C_f est symétrique par rapport à l'origine.

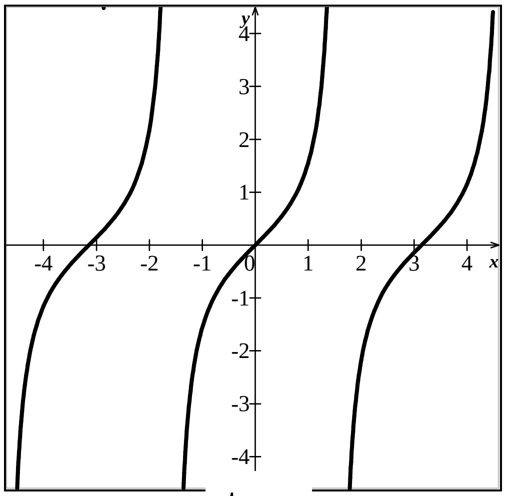


$g(x)$

Exemple.
La fonction $g \ : \ x \mapsto g(x) = x^3 + x$ est-elle impaire ?
On calcule $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$, la fonction g est impaire.

Définition. Une fonction est dite **T–périodique** lorsque pour tout $x \in D_f$, $x + T \in D_f$, et $f(x + T) = f(x)$.
T s'appelle la **période.**

Propriété. Si la fonction f est T–périodique alors on construit la courbe sur un intervalle de longueur T puis on translate cette courbe.



$\tan x$

Exemple.
La fonction tan $: \ x \mapsto \tan x$ est-elle périodique ?

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

La fonction tan $: \ x \mapsto \tan x$ est π–périodique.

II. Variations d'une fonction

Pour déterminer les variations d'une fonction *f*, on calcule sa dérivée $f' = \frac{df}{dx}$ puis on étudie le signe de la dérivée.

Règles de base de la dérivation.

▶1. Les constantes. La dérivée d'une constante est nulle.
$f(x) = 5$, $f'(x) = 0$ car $(k)' = 0$ avec $k = 5$.

▶2. Les fonctions polynômiales.
$g(x) = x$, $g'(x) = 1$ car $(x)' = 1$
$h(x) = x^3$, $h'(x) = 3x^2$ car $(x^n)' = nx^{n-1}$
$k(x) = x^2 + x$, $k'(x) = 2x + 1$ car $(u + v)' = u' + v'$ avec $u = x^2$ et $v = x$.
$l(x) = 4x^6$, $l'(x) = 4 \times 6x^5 = 24x^5$ car $(ku)' = k \times u'$ avec $u = x^6$ et $k = 4$.

▶3. Les produits de fonctions.
$m(x) = x^2 \times (3x + 4)$, $m'(x) = 2x \times (3x + 4) + x^2 \times 3 = 9x^2 + 8x$ car $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ avec $u = x^2$ et $v = 3x + 4$.

▶4. Les quotients de fonctions.
$p(x) = \frac{1}{x}$, $p'(x) = \frac{-1}{x^2}$ car $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$
$q(x) = \frac{5}{x^3} + 1$, $q(x) = \frac{-15}{x^4}$ car $\left(\frac{1}{x^n}\right)' \frac{-n}{x^{n+1}}$
$r(x) = \frac{1}{x^2+2x}$, $r'(x) = -\frac{2x+2}{(x^2+2x)^2}$ car $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ avec $u = x^2 + 2x$
$t(x) = \frac{4x+1}{3x-2}$, $t'(x) = \frac{4(3x-2)-(4x+1)\times 3}{(3x-2)^2} = \frac{12x-8-12x-3}{(3x-2)^2} = \frac{-11}{(3x-2)^2}$ car $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u = 4x + 1$ et $v = 3x - 2$.

▶5. La racine carrée.
$w(x) = \sqrt{x}$, $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ car $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

▶6. Les fonctions circulaires.
$a(x) = \sin x$, $a'(x) = \cos x$ car $(\sin x)' = \cos x$
$b(x) = \cos x$, $b'(x) = -\sin x$ car $(\cos x)' = -\sin x$

Rappel de notation.
On dit que l'on compose deux fonctions lorsque l'on applique deux fonctions l'une après l'autre :
Par exemple $f(x) = \sin x$ et $g(y) = y^2$, $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\sin x] = (\sin x)^2$.

Théorème. Dérivée des fonctions composées.

$$v \circ u(a) = v[u(a)] \qquad a \overset{u}{\mapsto} u(a) \overset{v}{\mapsto} v[u(a)] = v \circ u(a)$$

Si *u* est une fonction dérivable en *a* et *v* une fonction dérivable en *b* = *u*(*a*), alors *v*∘*u* est dérivable en *a* et $(v \circ u)'(a) = v' \circ u(a) \times u'(a)$

Exemples.

▶1. $f(x) = \sin^2 x$, on décompose en $x \overset{u}{\mapsto} \sin x \overset{v}{\mapsto} (\sin x)^2$
$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = \cos x \times 2(\sin x) = 2\sin x\cos x$.

▶2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$, on décompose $x \overset{u}{\mapsto} x^2 - 3x + 1 \overset{v}{\mapsto} \sqrt{x^2 - 3x + 1}$
$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = (2x - 3) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+1}} = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+1}}$.
▶3. $f(x) = \cos\left(7x + \frac{\pi}{6}\right)$, on décompose $x \overset{u}{\mapsto} 7x + \frac{\pi}{6} \overset{v}{\mapsto} \cos\left(7x + \frac{\pi}{6}\right)$
$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = -7\sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Propriété. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$
$x \overset{u}{\mapsto} u(x) \overset{v}{\mapsto} \left(u(x)\right)^\alpha$ donc $v \circ u = u^\alpha$
$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v' \circ u(x) = u'(x) \times \alpha u^{\alpha-1}(x)$
donc $(u^\alpha)' = \alpha \times u^{\alpha-1} \times u'$

Exemple.
$f(x) = (4x - 3)^3$, $f'(x) = 3 \times (4x - 3)^2 \times 4 = 12 \times (4x - 3)^2$

III. Dérivées successives d'une fonction

Définition.
Soit une fonction *f* dérivable sur I telle que f' soit dérivable aussi sur I.
On appelle dérivée seconde de la fonction f et on note f'', la fonction dérivée de la dérivée f'. On appelle dérivée d'ordre *k* de la fonction f et on note $f^{(k)}$, la fonction dérivée de la dérivée d'ordre *k*–1 : $f^{(k-1)}$. $f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$, $f^{(4)} = (f''')'$, $f^{(5)} = \left(f^{(4)}\right)'$, … , $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$

Exemple.
$f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 4$ $f'(x) = 12x^2 - 2x + 2$ $f''(x) = 24x - 2$ $f'''(x) = 24$

Exemple.
Pour appréhender au mieux le mouvement d'un corps, le physicien étudie l'évolution dans le temps de la position $d(t)$ d'un objet, de sa vitesse $d'(t)$ et de son accélération$d''(t)$.

Un chariot se déplace dans un mouvement uniforme de translation rectiligne.
Il se déplace à la vitesse constante de 1,4 m.s^{-1}.
Son accélération est nulle.
Sa position à l'instant *t* est $d(t) = v \times t = 1{,}4 \times t$ mètres, en considérant comme origine la position initiale soit *d*(0) = 0 m.
La vitesse est la dérivée de la position.
L'accélération est la dérivée de la vitesse donc la dérivée seconde de la position.

IV. Equation d'une tangente à la courbe

Propriété.
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I, soit a un point de l'intervalle I tel que *f* soit dérivable en a.
On note A le point de la courbe c_f de coordonnées (*a* ; *f*(*a*)).
La tangente à la courbe c_f au point A a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Exemple.

$f(x) = \sqrt{x}$, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de *f* pour *x* = 1.

$f(1) = \sqrt{1} = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(1) = \frac{1}{2}$ donc $y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.