

Devoir maison pour les futurs spé mathématiques

Exercice 1

Soit un entier naturel N impair.

On cherche une condition nécessaire pour que l'on puisse écrire $N = a^2 + b^2$ avec a et b deux entiers naturels.

- 1) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la parité de $a^2 + b^2$, pour a et b deux entiers.

a	b	a^2	b^2	$a^2 + b^2$
Pair	Pair			
Pair	Impair			
Impair	Pair			
Impair	Impair			

- 2) Si $N = a^2 + b^2$ est impair alors
- En utilisant la question 1) justifier que les entiers a et b n'ont pas la même parité.
 - On pose $a = 2u$ et $b = 2v + 1$ avec u et v deux entiers naturels. Démontrer que N est de la forme $(4k + 1)$, où k est un entier positif.
- 3) Les entiers impairs de la forme $(4k + 1)$ peuvent-ils tous s'écrire sous la forme de la somme de deux carrés ? (vous pouvez chercher un éventuel contre-exemple pour commencer et si vous n'en trouvez pas il faudra se retrousser les manches et faire une démonstration générale.)

Exercice 2

On appelle triangle rectangle presque isocèle (TRPI) tout triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont des entiers consécutifs x et $x + 1$ et dont la longueur de l'hypoténuse y est entière. On dit alors que le couple $(x; y)$ définit le TRPI.

- 1) Démontrer qu'un couple d'entiers naturels définit un TRPI si et seulement si : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.
- 2) Soit un couple d'entiers naturels définissant un TRPI.
- Démontrer que y^2 est impair. Que peut-on en déduire concernant la parité de y .
 - Soit d un diviseur commun de x et y . En étudiant $(y^2 = 2x^2 + 2x + 1)$ démontrer que d divise 1.
 - Quelles sont la ou les seules valeurs possibles pour les diviseurs commun de x et y ?
- 3) On souhaite chercher de manière systématique les couples d'entiers naturels $(x; y)$ définissant des TRPI où $1 \leq x \leq 1000$ et $1 \leq y \leq 1000$.
- Recopier et compléter l'algorithme incomplet suivant :
Pour x allant de 1 à faire :
 Pour y allant de x à faire :
 Si Alors :
 Afficher $(x; y)$
 Fin du si
 Fin du pour
Fin du pour
 - Ecrire le programme en python (vous pouvez coller une copie d'écran sur votre copie) et indiquer ce que l'ordinateur vous offre comme couple lorsque vous exécutez ce programme.
 - Vérifier à la main que l'ordinateur ne s'est pas trompé pour trois couples proposés par l'ordinateur.