Devoir maison pour les futurs spé mathématiques

Exercice 1

Soit un entier naturel N impair.

On cherche une condition nécessaire pour que l'on puisse écrire $N = a^2 + b^2$ avec a et b deux entiers naturels.

1) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la parité de $a^2 + b^2$, pour a et b deux entiers.

a	b	a^2	b^2	$a^2 + b^2$
Pair	Pair			
Pair	Impair			
Impair	Pair			
Impair	Impair			

2) Si $N = a^2 + b^2$ est impair alors
   a. En utilisant la question 1) justifier que les entiers a et b n'ont pas la même parité.
   b. On pose $a = 2u$ et $b = 2v + 1$ avec avec u et v deux entiers naturels. Démontrer que N est de la forme $(4k + 1)$, où k est un entier positif.
3) Les entiers impairs de la forme $(4k + 1)$ peuvent-ils tous s'écrire sous la forme de la somme de deux carrés ? (Vous pouvez chercher un éventuel contre-exemple pour commencer et si vous n'en trouvez pas il faudra se retrousser les manches et faire une démonstration générale.)

Exercice 2

On appelle triangle rectangle presque isocèle (TRPI) tout triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont des entiers consécutifs x et $x + 1$ et dont la longueur de l'hypoténuse y est entière. On dit alors que le couple $(x; y)$ définit le TRPI.

1) Démontrer qu'un couple d'entier naturels définit un TRPI si et seulement si : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.
2) Soit un couple d'entier naturels définissant un TRPI.
   a. Démontrer que y^2 est impair. Que peut-on en déduire concernant la parité de y.
   b. Soit d un diviseur commun de x et y. En étudiant $(y^2 = 2x^2 + 2x + 1)$ démontrer que d divise 1.
   c. Quelles sont la ou les seules valeurs possibles pour les diviseurs commun de x et y ?
3) On souhaite chercher de manière systématique les couples d'entiers naturels $(x; y)$ définissant des TRPI où $1 \leq x \leq 1000$ et $1 \leq y \leq 1000$.
   a. Recopier et compléter l'algorithme incomplet suivant :

      Pour x allant de 1 à ……… faire :

      Pour y allant de x à ……… faire :

      Si …………………… Alors :

      Afficher $(x; y)$

      Fin du si

      Fin du pour

      Fin du pour

   b. Ecrire le programme en python (vous pouvez coller une copie d'écran sur votre copie) et indiquer ce que l'ordinateur vous offre comme couple lorsque vous exécutez ce programme.
   c. Vérifier à la main que l'ordinateur ne s'est pas trompé pour trois couples proposés par l'ordinateur.

Correction

Exercice1

1)

a	b	a^2	b^2	a^2+b^2
Pair	Pair	Pair	Pair	Pair
Pair	Impair	Pair	Impair	Impair
Impair	Pair	Impair	Pair	Impair
Impair	Impair	Impair	Impair	Pair

2) Si N est impair alors

a. Remarque : on peut lire sur le tableau 1) à la première ligne que a pair ET b pair => a^2+b^2 pair.
La question qui est posée est une implication allant dans l'autre sens.
D'après ce tableau explicitant toutes les possibilités selon les parités de a et de b, la situation a^2+b^2 impair correspond aux lignes 2 et 3, autrement dit :
a^2+b^2 impair ⇔ ((a pair) et (b impair)) ou ((a impair et b pair))
⇔ a et b sont de parités différentes.

b. a étant pair il existe un entier u tel que $a=2u$.
b étant impair il existe un entier v tel que $b=2v+1$.
Ainsi $N=a^2+b^2=(2u)^2+(2v+1)^2=4u^2+4v^2+4v+1=4(u^2+v^2+v)+1=4k+1$ si on prend $k=u^2+v^2+v$ ainsi : $N=4k+1$ avec k un entier

3) On a prouvé à la question précédente que si N un nombre impair pouvait être écrit sous la forme de carré de deux entiers alors ceux-ci étaient de parités différentes et que N pouvait être écrit sous la forme $N=4k+1$ avec k un entier.

Maintenant on s'interroge sur la réciproque : est-ce que tout entier N peut s'écrire sous la forme d'une somme de carré de deux entiers.

k	$4k+1$	a^2+b^2
0	1	0^2+1^2
1	5	1^2+2^2
2	9	0^2+3^2
3	13	3^2+2^2
4	17	4^2+1^2
5	21	???

La décomposition en somme de carré des premiers nombres de la forme $4k+1$ avec k entier est plutôt facile (voir tableau à gauche) jusqu'à ce qu'on arrive à où $k=5$, et donc à $N=4k+1=21$.
On ne voit pas de décomposition évidente, mais ne pas arriver à faire quelque chose ne veut pas nécessairement dire que cette chose est impossible, souvent c'est qu'on ne sait pas comment s'y prendre.
Il nous faut travailler de manière méthodique pour être sûr d'avoir exploré toutes les combinaisons et donc d'être sûr qu'il n'y a pas de décomposition.

Les carrés possibles plus petits que 21 sont 0, 1, 4, 9, 16

Je vais faire un tableau contenant la somme des carrés possibles … c'est un tableau incomplet car le vrai continue indéfiniment dans les deux directions.

$16+9>21$, $16+4<21$ donc pas la peine de tester 1 et 0

Plus on va vers la droite ou vers le bas, plus la somme augmente donc si on dépasse 21 ce n'est pas la peine de continuer.

$a^2 \setminus b^2$	0	1	4	9	16	25
0	0	**1**	4	**9**	16	**25**
1	**1**	2	**4**	10	**17**	26
4	4	**4**	8	**12**	20	**29**
9	**9**	10	**12**	18	**25**	34
16	16	**17**	20	**25**	32	**41**
25	**25**	26	**29**	34	**41**	50

En rouge j'ai indiqué les sommes trop grandes, si je poursuivais mon tableau je ne ferais qu'ajouter des cases rouges et donc je ne trouverai pas de case contenant 21.
Si une décomposition existe je dois trouver 21 dans une des cases non coloriées, or aucune d'entre elles ne contient cette valeur.
Ainsi 21 ne peut être décomposé comme somme de deux carrés
Ce contre-exemple est suffisant pour prouver que Tous les nombres de la forme $4k+1$ ne sont pas nécessairement décomposable sous la forme d'une somme de deux carrés.

Remarque : 21 étant impair, on sait d'après le 2a) que a et b ne sont pas de même parité, donc une case blanche sur deux ne peut donner la bonne réponse, je n'ai même pas à regarder son contenu pour savoir que ce n'est pas le nombre recherché.

Exercice 2

1) D’après le théorème de Pythagore on a $y^2 = (x+1)^2 + x^2$ et donc $y^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2$ et donc $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

2) Soit un couple d’entier naturels définissant un TRPI.

   a. $y^2 = 2x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 + x) + 1$ si je pose $k = x^2 + x$ alors comme x est un entier, x^2 en est un aussi (par produit d’entier) et donc k en est aussi un par somme et ainsi $y^2 = 2k + 1$ avec k un entier donc y^2 est impair.
   Si y est pair alors $y = 2p$ et donc $y^2 = 4p^2$ et donc y^2 est aussi pair. Or y^2 est impair donc on ne peut avoir y pair, et donc y est lui aussi impair.

   b. Soit d un diviseur commun de x et y alors il existe p et q deux entiers tels que $x = dp$ et $y = dq$ ainsi $y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow (dq)^2 = 2(dp)^2 + 2(dp) + 1$ et donc $d^2q^2 = 2d^2p^2 + 2dp + 1 \Leftrightarrow d^2q^2 - 2d^2p^2 - 2dp = 1 \Leftrightarrow d(dq^2 + 2dp^2 - 2q) = 1$ or d, p et q étant entiers $dq^2 + 2dp^2 - 2q$ le sera aussi et donc 1 est divisible par d.

   c. Le seul nombre pouvant diviser 1 est 1, donc $d = 1$. Ce qui veut dire que si un nombre divise x et y alors il vaut 1. Ainsi ces deux nombres n’admettent que 1 comme diviseur commun, ils sont donc premiers entre eux.

3) K

   a. Pour x allant de 1 à **1000** faire :
      Pour y allant de x à **1000** faire :
         Si $\boldsymbol{y^2 = 2x^2 + 2x + 1}$ Alors :
            Afficher $(x; y)$
         Fin du si
      Fin du pour
   Fin du pour

   Remarque : la deuxième boucle commence à x et non à 1, car y étant la mesure l’hypoténuse elle ne sera jamais inférieure à celle d’un côté de l’angle droit.

   b. En python :

```
for x in range(1,1001):
  for y in range(x,1001):
    if y**2==2*x**2+2*x+1 :
      print("(",x,",",y,")")
```

```
( 3 , 5 )
( 20 , 29 )
( 119 , 169 )
( 696 , 985 )
```

   c. On obtient :
   Pour (3,5)
   $y^2 = 5^2 = 25$ et $2x^2 + 2x + 1 = 2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 18 + 6 + 1 = 25$
   donc on a bien $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$

   Pour (20,29) :
   $y^2 = 29^2 = 841$ et $2x^2 + 2x + 1 = 2 \times 20^2 + 2 \times 20 + 1 = 800 + 40 + 1 = 841$
   donc on a bien $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$

   Pour (119,169) :
   $y^2 = 169^2 = 28\,561$ et $2x^2 + 2x + 1 = 2 \times 119^2 + 2 \times 119 + 1 = 28322 + 238 + 1 = 28561$
   donc on a bien $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$

   Pour (696,985) :
   $y^2 = 985^2 = 970\,225$ et $2x^2 + 2x + 1 = 2 \times 696^2 + 2 \times 696 + 1 = 28561$
   donc on a bien $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$