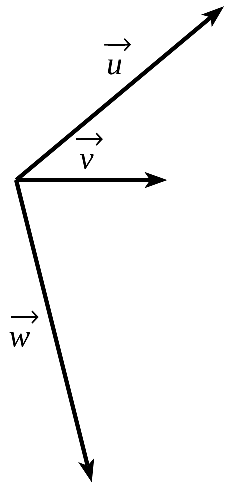
Exercices sur les vecteurs

Exercice 1 :

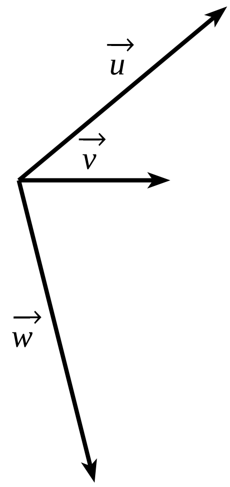
Associativité de la somme de trois vecteurs.

On donne trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Sur les deux figures suivantes tracer la somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ de deux manières :

- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$



- $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$



Exercice 2 :

Relation de Chasles

1) Simplifier les écritures suivantes en utilisant la relation de Chasles.

   a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

   b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

   c) $\vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$

2) Démontrer que pour tous points A, A, B et C :

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

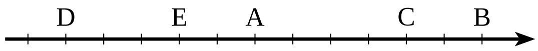
3) $ABCD$ est un parallélogramme et M un point quelconque. Démontrer que :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0}$$

Exercice 3 :

Multiplication par un scalaire

Les point A, B C, D et E sont définis sur la droite graduée ci-dessous. Dans chaque cas, trouver le nombre réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$



1) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AE}$

2) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AE}$

3) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$

4) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$

Exercice 4 :

Multiplication par un scalaire

ABC est un triangle.

1) Placer le point D et E tels que :

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2) Trouver le nombre k tel que : $\overrightarrow{DE} = k\,\overrightarrow{AB}$

Exercice 5 :

Multiplication par un scalaire

ABC est un triangle.

1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
Prouver que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

2) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$
Prouver que C est le milieu de $[ED]$.

3) Les droites (AD) et (BE) se coupent en I. Que représente I pour le triangle ABC ?
Prouver que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.

Exercice 6 :

Placement de points

A et B sont deux points tels que $AB = 6$ cm. Placer les points M et N définis par les relations suivantes :

$$2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{0}$$

Exercice 7 :

Colinéarité

ABC est un triangle, E un point tel que : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, I un point tel que $\overrightarrow{CI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F un point tel que : $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure. On prendra $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm et $AC = 7,5$ cm.
2) Montrer que : $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{IF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.
3) En déduire que les points I, E et F sont alignés.

Exercice 8 :

Milieux

(AB) est une droite. Les points M et N sont tels que :

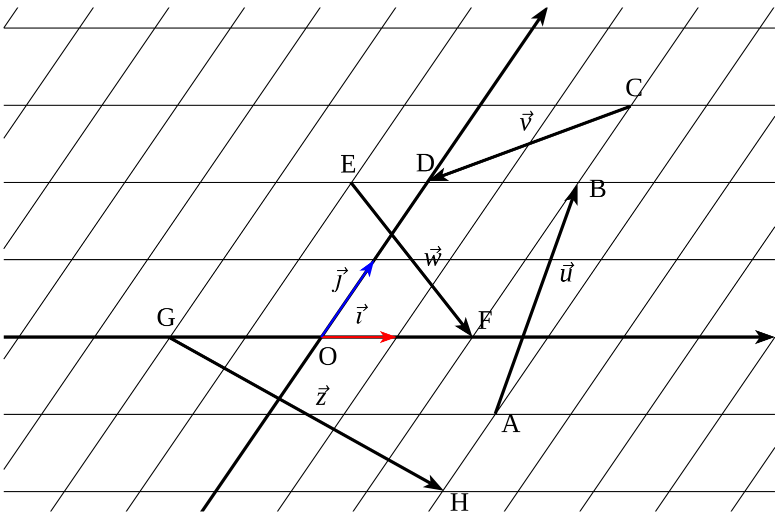
$$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} = \vec{0} \quad \text{et} \quad -2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$$

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer M.
2) Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer N.
3) I est le milieu de $[AB]$.
   Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   Déduire que I est aussi le mileu de $[MN]$.

Exercice 9 :

Repère quelconque

a) Dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H
b) Dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$.



Exercice 10 :

Repère quelconque bis

ABC est un triangle, I est le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AI]$. On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

1) Calculer les cooridonnées de I et J.
2) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}$$

Exercice 11 :

Repère orthonormal

Les points A, B et C sont tels que : $A(-2; -3)$, $B(5; 0)$ et $C(0; 7)$. G est le centre de gravité du triangle ABC.

1) a) Calculer les coordonnées du milieu I de $[BC]$.
   b) Quel est le nombre k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$?
   c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$. En déduire celles de $\overrightarrow{AG}$ puis celles de G.
2) Prouver que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exercice 12 :

Alignement et parallélisme

1) On donne les points suivant : $A(2; 3)$, $B(5; 7)$ et $C(-6; -8)$.
   Les points A, B, C sont-ils alignés ?
2) On donne les points $A(-2; 2)$, $B(1; 5)$, $C(-1; -2)$ et $D(7; 6)$.
   Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 13 :

Géométrie analytique

Dans un repère orthonormal, $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$on considère les points : $A(-4; 2)$, $B(-2; -4)$, $C(5, -3)$ et $D(4; 6)$. On appelle I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1) Placer les points A, B, C, D.
2) Calculer les coordonnées des points I, J, K, et L. Placer les points I, J, K et L.
3) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$. Que peut-on dire du quadrilatère $IJKL$?
4) Calculer les longueurs IJ et IL et JL. Le quadrilatère $IJKL$ est-il un rectangle ? Pourquoi ?

Exercice 14 :

Distance

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre $I(2;-1)$ et de rayon 5.

On donne les points $A(5;3)$, $B(-3;-2)$, $C\left(4;\dfrac{7}{2}\right)$ et $D\left(3;-1+2\sqrt{6}\right)$.

1) Calculer les longueurs IA, IB, IC, ID.
2) Quels sont les points qui appartiennent au cercle $\mathscr{C}$?

Exercice 15 :

A et B sont deux points distincts donnés. Placer les points M, N, P et Q tels que :

a) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{BP} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Exercice 16 :

[AB] est un segment de longueur 8 cm.

Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Exercice 17 :

ABC est un triangle. Réduire l'écriture du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

Exercice 18 :

Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont colinéaires :

a) $\vec{u}(2;-3)$ $\vec{v}\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$

b) $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$ $\vec{v}\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$

Exercice 19 :

Dans chaque cas, déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

a) $\vec{u}(2;6)$ $\vec{v}(m;3)$
b) $\vec{u}(-m;0)$ $\vec{v}(1;-3)$
c) $\vec{u}(27;2m)$ $\vec{v}(2m;3)$

Exercice 20 :

Dans un repère, on donne les points : M(0; −3), N(2; 3), P(−9; 0) et Q(−1; −1)

a) Calculer les coordonnées des points A et B tels que :

$$\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MQ}$$

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$

c) Démontrer que les points P, A et B sont alignés.

Exercice 21 :

Dans un repère, on donne les points : A$(1;-1)$, B$(-1;-2)$ et C$(-2;2)$

a) Déterminer lescoordonnées du point G vérifiant : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

b) Déterminer les coordonnées du points D vérifiant : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

c) Faire une figure. Que peut-on conjecturer pour les points B, G et D ? Démontrer cette conjecture.

Exercice 22 :

Dans un repère orthonormé, on donne les points : A$(-1;2)$, B$(7;-8)$ et E$(7;2)$

a) Démontrer que le point E appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].

b) Déterminer les coordonnées du point F, symétrique de E par rapport au centre I du cercle $\mathscr{C}$.

c) Quelle est la nature que quadrilatère AEBF

Exercice 23 :

ABCD est un rectangle.

a) Faire une figure et placer les points I, J, K et L tels que :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{CK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{DL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

b) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$, exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

d) Démontrer que le centre du rectangle est aussi le milieu du segment [IK].

Exercice 24 :

Dans un repère, on donne les points : A$(-3;3)$, B$(10;-3)$, C$(7;7)$, E$(6;2)$.

a) A', B' et C' sont les points définis par :

$$\overrightarrow{EA'}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EA},\quad \overrightarrow{EB'}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EB},\quad \overrightarrow{EA'}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$$

Calculer les coordonnées des points A', B' et C'.

b) 1) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$

2) Que peut-on dire de ces vecteurs ? Que peut-on en déduire pour les droite (AB) et (A'B') ?

c) Démontrer que les droites (AC) et (A'C') d'une part et les droites (BC) et (B'C') d'autre part sont parallèles.