Interrogation (sujet A)

Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère orthonormal. Soit $A(5;-4)$, $B(-3;-1)$ et $C(3;15)$ trois points.

1) Prouver que les cordonnées de M le milieu de [AC] sont 4 et 5,5.
2) Déterminer les coordonnées de D le point tel que ABCD soit un parallélogramme.
3) Déterminer les mesures AB et CB.
4) Sachant que $AC = \sqrt{365}$ que peut-on dire du triangle ABC puis du quadrilatère ABCD ?

Interrogation (sujet C)

Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère orthonormal. Soit $A(-6;-8)$, $B(4;-4)$ et $C(8;6)$ trois points.

1) Prouver que les cordonnées de J' le milieu de [AC] sont 1 et -1.
2) Déterminer les coordonnées de D le point tel que ABCD soit un parallélogramme.
3) Déterminer les mesures AB et CB.
4) Que peut-on dire du triangle ABC puis du quadrilatère ABCD ?
5) Que peut on en déduire quant à la mesure de l'angle $\widehat{AJ'B}$?

Questions bonus

Résoudre : $|5-x| = 4$ et $|143+x| \geq 23$

Interrogation (Sujet B)

Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère orthonormal. Soit $P(1;9)$, $Q(3;-5)$ et $R(-7;-15)$ trois points.

1) Prouver que les cordonnées de M le milieu de [PR] sont -3 et -3
2) Déterminer les coordonnées de S le point tel que PQRS soit un parallélogramme.
3) Déterminer les mesures PQ et PM.
4) Sachant que $QM = \sqrt{40}$ que peut-on dire du triangle PQM puis du quadrilatère PQRS ?

Interrogation (Sujet D)

Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère orthonormal. Soit $E(-7;1)$, $F(1;11)$ et $G(16;-1)$ trois points.

1) Prouver que les cordonnées de I' le milieu de [EG] sont 4,5 et 0
2) Déterminer les coordonnées de H le point tel que EFGH soit un parallélogramme.
3) Déterminer les mesures EG et FH.
4) Que peut-on dire du quadrilatère EFGH puis du triangle EFI' ?
5) Que peut-on en déduire quant à la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$?

Questions bonus

Résoudre : $|150+x| = 11$ et $|3-x| < 20$

Correction Interrogation (sujet A) avec des commentaires

Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère orthonormal. Soit $A(5;-4)$, $B(-3;-1)$ et $C(3;15)$ trois points.

1) Prouver que les cordonnées de M le milieu de [AC] sont 4 et 5,5.

M le milieu de [AC] donc (hypothèse donnant le droit d'utiliser la formule)

$M\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\right) = M\left(\frac{5+3}{2}\,;\frac{-4+15}{2}\right)$

$= M\left(\frac{8}{2};\frac{11}{2}\right) = M(4;5{,}5)$ Attention on ne peut écrire M=(4 ;5,5)

2) Déterminer les coordonnées de D le point tel que ABCD est un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en leur milieux or M est le milieu de $[AC]$ donc ça sera aussi celui de $[BD]$ et donc :

$$M(4;5{,}5) = M\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \frac{-3+x_D}{2} \\ 5{,}5 = \frac{-1+y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\times 2 = -3+x_D \\ 5{,}5\times 2 = -1+y_D \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8+3 = x_D \\ 11+1 = y_D \end{cases}$ ainsi $D(11;12)$

3) Déterminer les mesures AB et BC.

Dans $(O\,;I\,;J)$ orthonormal, (important sinon la formule est inutilisable)

- $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(-3-5)^2+\left(-1-(-4)\right)^2}$
  $= \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$
- $CB = \sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2} = \sqrt{(-3-3)^2+(-1-15)^2}$
  $= \sqrt{36+256} = \sqrt{292}$

4) Sachant que $AC = \sqrt{365}$ que peut-on dire du triangle ABC puis du quadrilatère ABCD ?

$AC^2 = 365$ et $AB^2+CB^2 = 73+292 = 365$
donc $AC^2 = AB^2+CB^2$
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore on peut dire que ABC est rectangle en B.
Ainsi ABCD est un parallélogramme avec un angle droit, c'est donc un rectangle.

Si l'égalité n'avait pas été vérifiée il aurait fallu utiliser la contraposée de Pythagore ou le théorème de Pythagore pour conclure que le triangle n'est pas rectangle.

Interrogation (Sujet B)

Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère orthonormal. Soit $P(1;9)$, $Q(3;-5)$ et $R(-7;-15)$ trois points.

1) Prouver que les cordonnées de M le milieu de [PR] sont -3 et -3

M le milieu de [PR] $\Leftrightarrow M\left(\frac{x_P+x_R}{2};\frac{y_P+y_R}{2}\right) = M\left(\frac{1+(-7)}{2};\frac{9+(-15)}{2}\right) = M\left(\frac{-6}{2};\frac{-6}{2}\right) =$ $M(-3;-3)$

2) Déterminer les coordonnées de S le point tel que PQRS est un parallélogramme.

Si PQRS est un parallélogramme alors M est le milieu commun de [PR] et $[QS]$ et donc :

$$M(-3;-3) = M\left(\frac{x_Q+x_S}{2};\frac{y_Q+y_S}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = \frac{3+x_S}{2} \\ -3 = \frac{-5+y_S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\times 2 = 3+x_S \\ -3\times 2 = -5+y_S \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6-3 = x_S \\ -6+5 = y_S \end{cases}$ ainsi $S(-9;-1)$

3) Déterminer les mesures PQ et PM.

Dans $(O\,;I\,;J)$ orthonormal,

- $PQ = \sqrt{\left(x_Q-x_P\right)^2+\left(y_Q-y_P\right)^2} = \sqrt{(3-1)^2+(-5-9)^2} =$ $\sqrt{4+196} = \sqrt{200}$
- $PM = \sqrt{(x_M-x_P)^2+(y_M-y_P)^2} = \sqrt{(-3-1)^2+(-3-9)^2} =$ $\sqrt{16+144} = \sqrt{160}$

4) Sachant que $QM = \sqrt{40}$ que peut-on dire du triangle PQM puis du quadrilatère PQRS ?

$PQ^2 = 200$ et $PM^2+QM^2 = 160+40 = 200$ donc $PQ^2 = PM^2+QM^2$
donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore on peut dire que PQM est rectangle en M.
Ainsi ABCD est un parallélogramme avec ses diagonales qui se coupent perpendiculaires, c'est donc un losange.

Interrogation (sujet C)

Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère orthonormal. Soit $A(-6;-8)$, $B(4;-4)$ et $C(8;6)$ trois points.

1) Prouver que les cordonnées de J' le milieu de [AC] sont 1 et -1.

J le milieu de [AC] ⇔ $J'\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)=J'\left(\frac{-6+8}{2};\frac{-8+6}{2}\right)=J'\left(\frac{2}{2};\frac{-2}{2}\right)=J'(1;-1)$

2) Déterminer les coordonnées de D le point tel que ABCD est un parallélogramme.

Comme ABCD est un parallélogramme , J' est le milieu commun de $[AC]$ et $[BD]$ et donc :

$J'(1;-1)=J'\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right)$

⇔ $\begin{cases}1=\frac{4+x_D}{2}\\-1=\frac{-4+y_D}{2}\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}1\times 2=4+x_D\\-1\times 2=-4+y_D\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}2-4=x_D\\-2+4=y_D\end{cases}$ ainsi $D(-2;2)$

3) Déterminer les mesures AB et BC.

Dans $(O\,;I\,;J)$ orthonormal,

- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{\left(4-(-6)\right)^2+\left(-4-(-8)\right)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}$
- $CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(4-8)^2+(-4-6)^2}=\sqrt{16+100}=\sqrt{116}$

4) Que peut-on dire du triangle ABC puis du quadrilatère ABCD ?

ABC est isocèle en B, donc le parallélogramme ABCD a ses quatre côtés de même mesure, c'est donc un losange.

5) Or comme les diagonales d'un losange se coupent perpendiculairement on aura [AC] et [BD] perpendiculaires en J' et donc $\widehat{AJ'B}=90°$.

Questions bonus

Résoudre : $|5-x|=4$

⇔ $d(5;x)=4$

$S=\{5-4;5+4\}=\{1;9\}$

et

$|143+x|\geq 23$

⇔ $|x-(-143)|\geq 23$

⇔ $d(x;-143)\geq 23$

S=$]-\infty\,;-143-23]\cup[-143+23\,;+\infty[$

$=]-\infty;-146]\cup[-120;+\infty[$

Interrogation (Sujet D)

Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère orthonormal. Soit $E(-7;1)$, $F(1;11)$ et $G(16;-1)$ trois points.

1) Prouver que les cordonnées de I' le milieu de [EG] sont 4,5 et 0

I' le milieu de [EG] ⇔ $I'\left(\frac{x_E+x_G}{2};\frac{y_E+y_G}{2}\right)=I'\left(\frac{-7+16}{2};\frac{1+(-1)}{2}\right)=I'\left(\frac{9}{2};\frac{0}{2}\right)=I'(4{,}5;0)$

2) Déterminer les coordonnées de H le point tel que EFGH soit un parallélogramme.

Comme EFGH est un parallélogramme, I' est le milieu commun de [EG] et $[FH]$ et donc :

$I'(4{,}5;0)=I'\left(\frac{x_F+x_H}{2};\frac{y_F+y_H}{2}\right)$ ⇔ $\begin{cases}4{,}5=\frac{1+x_H}{2}\\0=\frac{11+y_H}{2}\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}4{,}5\times 2=1+x_H\\0\times 2=11+y_H\end{cases}$ ⇔

$\begin{cases}9-1=x_H\\0-11=y_H\end{cases}$ ainsi $H(8;-11)$

3) Déterminer les mesures EG et FH.

Dans $(O\,;I\,;J)$ orthonormal,

- $EG=\sqrt{(x_G-x_E)^2+(y_G-y_E)^2}=\sqrt{\left(16-(-7)\right)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{529+4}=\sqrt{533}$
- $FH=\sqrt{(x_H-x_F)^2+(y_H-y_F)^2}=\sqrt{(8-1)^2+(-11-11)^2}=\sqrt{49+484}=\sqrt{533}$

4) Que peut-on dire du quadrilatère EFGH puis du triangle EFI' ?

Les diagonales du parallélogramme EFGH étant de même mesure, cette figure sera aussi un rectangle. De plus ses demi-diagonales [EI'] et [FI'] seront aussi de même mesure et donc EFI' est isocèle en I'.

5) Que peut-on en déduire quant à la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$?

EFGH est un rectangle donc $\widehat{EFG}=90°$

Questions bonus

Résoudre : $|150+x|=11$

⇔ $|x-(-150)|=11$

⇔ $d(x;-150)=11$

$S=\{-150-11;-150+11\}$

$=\{-161;-139\}$

et

$|3-x|<20$

⇔$d(3;x)<20$

$S=]3-20;3+20[=]-17;23[$