BACCALAUREAT BLANC
Session 2014

MATHEMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7**

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

L'usage de la calculatrice est autorisé (une seule calculatrice par candidat).

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Ce sujet comporte 6 pages dont <u>une ANNEXE en page 6 à rendre avec la copie</u>.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé conformément à la réglementation en vigueur.

Certaines constructions sont à effectuer sur une page annexe à rendre avec la copie, cette annexe sera numérotée dans l'ordre de la rédaction des solutions des candidats.

OBLIGATOIRE

Exercice 1 – [5 points]

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

– La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).

– La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note :

- V l'événement « la personne est contaminée par le virus »
- T l'événement « le test est positif ».

$\overline{V}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

▶1. a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$ et $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

▶2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.

▶3. a) Justifier par un calcul la phrase :

«Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée».

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

▶1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

▶2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 2 – [5 points]

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

▶1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 + 3i$, $z_B = -3 - i$ et $z_C = 2{,}08 + 1{,}98i$. Le triangle ABC est :

A. isocèle et non rectangle
B. rectangle et isocèle
C. rectangle et non isocèle
D. ni rectangle ni isocèle

▶2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z - 4i}{z + 2}$. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

A. un cercle de rayon 1
B. une droite
C. une droite privée d'un point
D. un cercle privé d'un point

▶3. Le nombre complexe $\dfrac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$ pour forme algébrique :

A. $\dfrac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$
B. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$
C. $\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$
D. les réponses A, B et C sont toutes correctes.

▶4. L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet pour solution :

A. $i\,e^{\frac{i\pi}{6}}$
B. $-0{,}5 + 0{,}8i$
C. $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
D. $i\,e^{\frac{i\pi}{3}}$

▶5. Soit $z_1 = \sqrt{6}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,e^{\frac{-i\pi}{3}}$, la forme exponentielle de $\dfrac{i \times z_1}{z_2}$ est :

A. $\sqrt{3}\,e^{\frac{19i\pi}{12}}$
B. $2\sqrt{3}\,e^{\frac{-i\pi}{12}}$
C. $\sqrt{3}\,e^{\frac{7i\pi}{12}}$
D. $\sqrt{3}\,e^{\frac{13i\pi}{12}}$

Exercice 3 – [5points]

Partie A : Une première gestion dans un parc animalier

On étudie l'évolution de la population d'herbivores, au cours du temps à partir de l'an 2000, dans le parc animalier *Alpha*.

On appelle n le nombre d'années écoulées après le début de l'expérience. En 2000, c'est à dire pour $n = 0$, le parc comptait 10 000 herbivores. On note A_n le nombre d'herbivores en l'an $2000 + n$.

Chaque année, on estime que le taux de naissance est de 10 % et que 500 herbivores meurent dans ce parc.

▶1. Prouver que, pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = 1{,}1 \times A_n - 500$.

▶2. Prouver que la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = A_n - 5\,000$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

▶3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $A_n = 5\,000(1 + 1{,}1^n)$

▶4. Déterminer **à partir** de quelle année, la population d'herbivores dépasse 20 000 têtes.

Partie B : Une deuxième gestion dans un autre par animalier

On se donne une population d'herbivores dans un parc *Béta* et on étudie l'évolution de cette population au cours du temps à partir de l'an 2000. On note B_n le nombre d'herbivores, en l'an $2000 + n$ dans le parc *Béta*. En 2000, ce parc comptait 10 000 herbivores.

A partir de 2001, on amène de l'extérieur du parc x_n autres herbivores. En 2001, on en a amené 1 000. A partir de 2001, d'une année sur l'autre, le nombre d'herbivores venant de l'extérieur diminue de 20%. On a donc $B_0 = 10\,000$ et $x_1 = 1\,000$.

On suppose que seul cet apport d'herbivores de l'extérieur fait varier le nombre d'herbivores du parc *Béta*.

▶1. Prouver que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $x_{n+1} = 0{,}8\, x_n$ et que pour tout entier naturel n, on a $B_{n+1} = B_n + x_{n+1}$.

▶2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche la population d'herbivores du parc *Béta* en 2056 :

```
N prend la valeur 0
B prend la valeur 10 000
X prend la valeur 1 000
Tant que N < ···
    B prend la valeur …
    X prend la valeur …
    N prend la valeur …
Fin tant que
Afficher …
```

▶3. Par récurrence sur n, démontrer que pour tout entier naturel n on a

$$B_n = 10\,000 + 5\,000 \times (1 - 0{,}8^n)$$

▶4. La population d'herbivores peut elle doubler dans ce parc ? Justifier la réponse.

Exercice 4 – [5 points]

On rappelle que la page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.
On nomme C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan, cette courbe est tracée sur la page 6 en annexe.

▶1. a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

b) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

▶2. a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe C au point A d'abscisse 1.

b) Etudier les variations de la fonction h définie, sur $]0;+\infty[$, par $h(x) = \ln x - x + 1$.
En déduire que la courbe C est en-dessous de la tangente Δ.

c) Tracer Δ sur le graphique de la page annexe.

▶3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.
On note α_n cette solution. On a donc, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{\alpha_n + \ln(\alpha_n) = n}$.

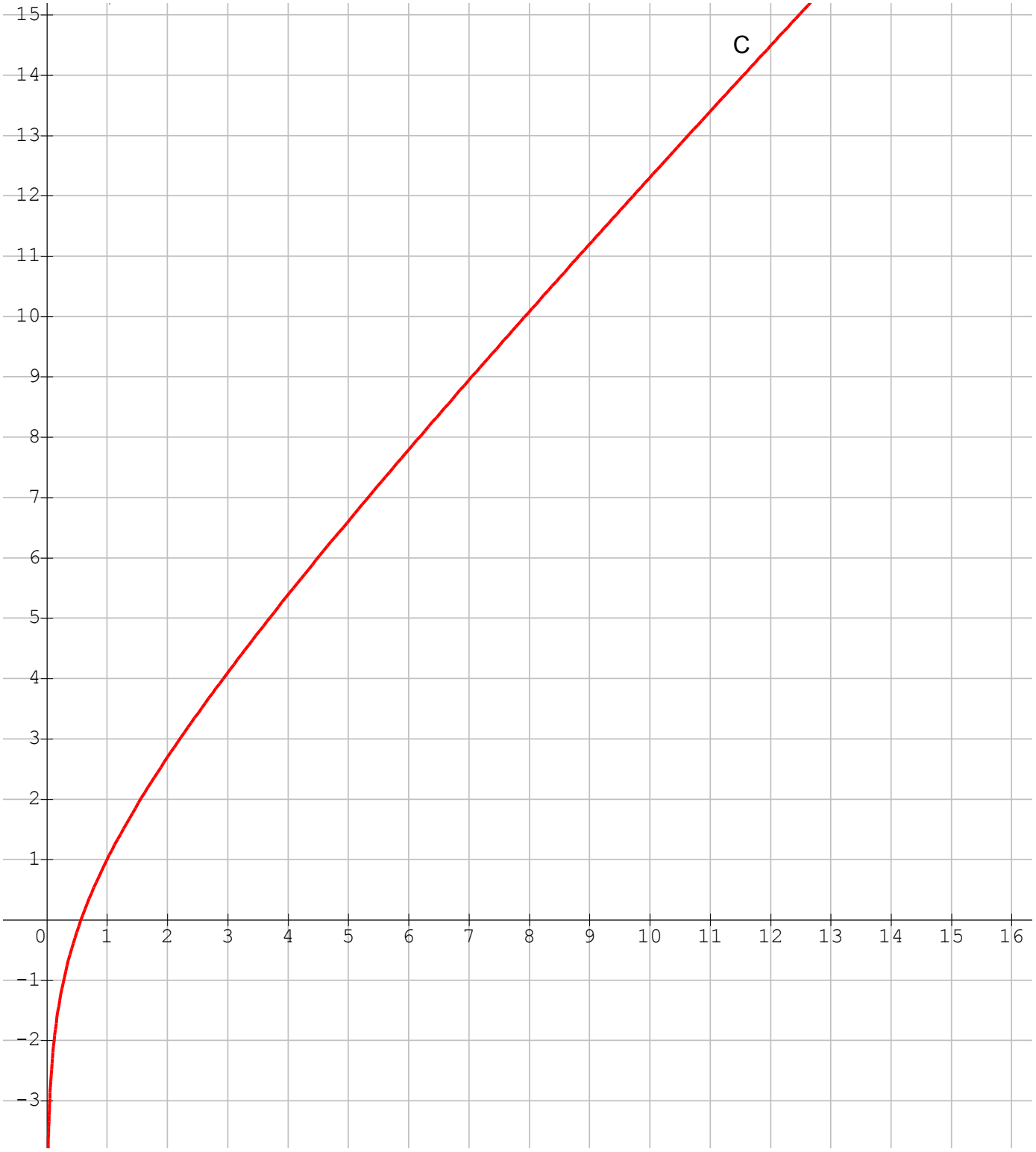
b) Prouver que $\alpha_1 = 1$.

c) On rappelle que sur la page 6 en annexe, on a tracé la courbe C dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe de abscisses en laissant apparents les traits de construction.

▶4. a) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

b) En utilisant le résultat de la question 2b), démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

b) En déduire la limite de la suite (α_n).

Page annexe - Exercice 4.

à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve