Devoir maison facultatif

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1+x+x^2} - x$ c) $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{-5x}{3-x}$

d) $\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} - x - 1$

g) $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ h) $\lim\limits_{x\to8} \frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}$ i) $\lim\limits_{x\to2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to-5} \frac{3x-12}{x^2+x-20}$ k) $\lim\limits_{x\to4} \frac{3x-12}{x^2+x-20}$ l) $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{3x+2-\cos(x)}{x^2-1}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+4\sin(x)}$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5}{x^2+4\sin(x)}$

Remarque : si on vous demande la limite en un réel a sans préciser s'il s'agit de a^+ ou a^- et qu'on ne vous donne pas non plus de domaine de définition pour vous guider, il vous faudra rechercher les deux limites (mais peut-être pas séparément).

Exercice 2

1) Donner l'équation de l'asymptote oblique associée à la première limite de l'exercice 1, pour vous aider on peut poser la fonction f qui a tout réel x associe le réel $f(x) = \frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}$ Trouver a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{1+x+x^2}$
2) Pour les autres limites de cet exercice indiquez si elles permettent de prouver l'existence d'une asymptote verticale ou horizontale (pensez bien à donner les équations de ces asymptotes)

Devoir maison facultatif

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1+x+x^2} - x$ c) $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{-5x}{3-x}$

d) $\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} - x - 1$

g) $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ h) $\lim\limits_{x\to8} \frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}$ i) $\lim\limits_{x\to2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to-5} \frac{3x-12}{x^2+x-20}$ k) $\lim\limits_{x\to4} \frac{3x-12}{x^2+x-20}$ l) $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{3x+2-\cos(x)}{x^2-1}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+4\sin(x)}$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5}{x^2+4\sin(x)}$

Remarque : si on vous demande la limite en un réel a sans préciser s'il s'agit de a^+ ou a^- et qu'on ne vous donne pas non plus de domaine de définition pour vous guider, il vous faudra rechercher les deux limites (mais peut-être pas séparément).

Exercice 2

1) Donner l'équation de l'asymptote oblique associée à la première limite de l'exercice 1, pour vous aider on peut poser la fonction f qui a tout réel x associe le réel $f(x) = \frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}$ Trouver a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{1+x+x^2}$
2) Pour les autres limites de cet exercice indiquez si elles permettent de prouver l'existence d'une asymptote verticale ou horizontale (pensez bien à donner les équations de ces asymptotes)

Correction : Devoir maison facultatif

a) $\frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}=\frac{x^3\left(-3+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}=x\ \frac{-3+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}=-3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}=-\infty$

On pose la fonction f qui a tout réel x associe le réel $f(x)=\frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}$

Trouvons a, b, c et d tels que $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{1+x+x^2}$

$ax+b+\frac{cx+d}{1+x+x^2}=\frac{(ax+b)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)}+\frac{cx+d}{1+x+x^2}$

$$=\frac{ax+b+ax^2+bx+ax^3+bx^2}{(1+x+x^2)}+\frac{cx+d}{1+x+x^2}=\frac{ax+b+ax^2+bx+ax^3+bx^2+cx+d}{(1+x+x^2)}$$

$=\frac{\left(ax^3+x^2(a+b)+x(a+b+c)+(b+c+d)\right)}{(1+x+x^2)}$ donc : $\frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}=ax+b+\frac{cx+d}{1+x+x^2}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-3=a\\7=a+b\\0=a+b+c\\-5=b+c+d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=a\\10=b\\0=a+b+c\\-5=b+c+d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=a\\10=b\\0=7+c\\-5=b+c+d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=a\\10=b\\-7=c\\-5=10+(-7)+d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=a\\10=b\\-7=c\\-8=d\end{cases}$

donc $f(x)=-3x+10+\frac{-7x-8}{1+x+x^2}$

On peut prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-7x-8}{1+x+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-7x-8}{1+x+x^2}=0$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-3x+10)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-3x+10)]=0$

Ainsi la droite $y=-3x+10$ est asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$

b) $\frac{x^3}{1+x+x^2}-x=\frac{x^3}{1+x+x^2}-\frac{x+x^2+x^3}{1+x+x^2}=\frac{-x-x^2}{1+x+x^2}=\frac{x^2\left(-\frac{1}{x}-1\right)}{x^2(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1)}=\frac{-\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}=-\frac{1}{1}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1+x+x^2}-x=-1$

Donc on a une asymptote horizontale d'équation $y=-1$ vers $+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to3^+}3-x=0^-$ et $\lim\limits_{x\to3^+}-5x=-15$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{-5x}{3-x}=+\infty$

Donc on a une asymptote verticale d'équation $x=3$ vers 3.

d) $\lim\limits_{x\to1^-}1-x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to1^-}x+2=3$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-x}{x+2}=0^+$ or $\lim\limits_{y\to0^+}\sqrt{y}=0^+$

donc par composition : $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}=0^+$

e) Pour tout x strictement positif on a : $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1+\frac{4}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{y\to1}\sqrt{y}=1$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{4}{x}=1$ et donc par quotient on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1+\frac{4}{x}\right)}=1$

Donc on a une asymptote horizontale d'équation $y=-1$ vers $+\infty$.

f) Pour tout x strictement positif on a :$\sqrt{x^2-x+1}-x-1=\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+(x+1)\right)}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+(x+1)\right)}$

$=\frac{\left(x^2-x+1-(x+1)^2\right)}{\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+(x+1)\right)}=\frac{x^2-x+1-\left(x^2+2x+1\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+(x+1)}=\frac{x^2-x+1-x^2-2x-1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+(x+1)}=\frac{-3x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{y\to1}\sqrt{y}=1$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$ ainsi par somme on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}=2$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}=-\frac{3}{2}$

Donc on a une asymptote horizontale d'équation $y=-\frac{3}{2}$ vers $+\infty$.

g) $\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\frac{(x+6)-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}$

$\lim\limits_{x\to3}x+6=9$ et $\lim\limits_{y\to9}\sqrt{y}=3$ et donc par composition puis par somme $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x+6}+3=3+3=6$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{1}{6}$

Remarque : j'aurai pu faire une limite à droite puis dire qu'à gauche c'était la même chose. En fait ici, le « côté » par lequel on arrive ne fait pas de différence.

En évaluation : si on ne précise pas, vous pouvez aussi ne pas préciser et si jamais vous avez une division par 0 la le côté importe et donc vous rajoutez un petit signe en exposant pour préciser le côté de votre recherche.

h) $\frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}=\frac{(\sqrt{2x}-4)(\sqrt{2x}+4)(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)(\sqrt{2x}+4)}=\frac{(2x-16)(\sqrt{x+1}+3)}{((x+1)-9)(\sqrt{2x}+4)}=\frac{2(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}{(x-8)(\sqrt{2x}+4)}=\frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{2x}+4)}$

On peut montrer facilement que $\lim\limits_{x\to8}(\sqrt{x+1}+3)=6$ et que $\lim\limits_{x\to8}(\sqrt{2x}+4)=8$ et donc par quotient

$\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}=\lim\limits_{x\to8}\frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{2x}+4)}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

i) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}}\sin(y)=1$ donc par composition : $\lim\limits_{x\to2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=1$

j) résolution de $x^2+x-20=0$ on a : $\Delta=1^2-4\times1\times(-20)=81=9^2$

le discriminant étant positif on aura deux solutions $x_1=\frac{-1-\sqrt{81}}{2}=-5$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{81}}{2}=4$

le signe du polynôme étant celui de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur on aura : $\lim\limits_{x\to-5^-}x^2+x-20=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-5^+}x^2+x-20=0^-$

de plus on a : $\lim\limits_{x\to-5}3x-12=-27$ donc par quotient on aura :

$\lim\limits_{x\to-5^-}\frac{3x-12}{x^2+x-20}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-5^+}\frac{3x-12}{x^2+x-20}=+\infty$

Donc on a une asymptote verticale d'équation $x=5$ vers 5.

k) comme on arrive à du zéro sur zéro on va changer de stratégie, j'utilise la recherche précédente

et je m'en sers pour factoriser le dénominateur : $\frac{3x-12}{x^2+x-20}=\frac{(3(x-4))}{(x-4)(x+5)}=\frac{3}{(x+5)}$

$\lim\limits_{x\to4}\frac{3x-12}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to4}\frac{3}{(x+5)}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

l) $\lim\limits_{x\to-1^+}3x+2-\cos(x)=-1-\cos(-1)$ ce qui vaut approximativement -1,54 si on est en radian, et -2 si on est en degré, mais l'essentiel ici c'est que le numérateur est négatif.

x^2-1 a deux racines 1 et -1 donc quand on fait la limite en -1^+ on est entre les racines et donc le polynôme négatif. Ainsi : $\lim\limits_{x\to-1^+}x^2-1=0^-$ et donc par quotient : $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{3x+2-\cos(x)}{x^2-1}=+\infty$

Donc on a une asymptote verticale d'équation $x=-1$ vers -1.

m) on a $-1\le\sin(x)\le1$ donc $-4\le4\sin(x)\le4$ et donc $x^2-4\le x^2+4\sin(x)\le x^2+4$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-4=+\infty$ donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+4\sin(x)=+\infty$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+4\sin(x)}=0$

Donc on a une asymptote horizontale d'équation $y=0$ vers $+\infty$.

n) $\frac{2x^2-5}{x^2+4\sin(x)}=\frac{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4\sin(x)}{x^2}\right)}=\frac{2-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{4\sin(x)}{x^2}}$

$-1\le\sin(x)\le1$ donc $-\frac{4}{x^2}\le\frac{4\sin(x)}{x^2}\le\frac{4}{x^2}$ donc $1-\frac{4}{x^2}\le1+\frac{4\sin(x)}{x^2}\le1+\frac{4}{x^2}$ or :

$\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{4}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{4}{x^2}=1$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{4\sin(x)}{x^2}=1$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}2-\frac{5}{x^2}=2$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5}{x^2+4\sin(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{4\sin(x)}{x^2}}=2$

Donc on a une asymptote horizontale d'équation $y=2$vers $+\infty$.