Limites Exemples de démonstrations

Sommaire :

1) déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) = x^4$
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ avec $f(x) = x^3$
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
4) montrons que si $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) + g(x) = l + l'$
5) erreur d'élève et analyse par Gaëlle Chayne et Julien Kergot
6) démonstrations de théorèmes du cours (DM du 22/9)

1) déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) = x^4$

pour la démonstration, j'ai mis en gras ce qui doit apparaitre sur le cahier/la copie, le reste c'est des explications , et la recherche qui doit être faite dans votre tête ou au brouillon.

<u>Le plan de bataille</u> (i.e. après avoir conjecturé la limite en question : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$, je reformule mon objectif). On veut montrer que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x > x_0, f(x) > A$ (autrement dit que pour tout réel A, il existe une valeur à partir de laquelle les f(x) sont plus grand que A.)

Soit A un réel,

Si A est négatif
vu que x^4 est toujours positif ou nul, peu importe la valeur de x on aura toujours $(x) > A$, donc ça sera valable pour tout x appartenant à n'importe quel intervalle du type $]x_0; +\infty[$, on a donc bien $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x > x_0, f(x) > A$

Si A est positif ou nul ….

je sais que f est croissante sur $]0; +\infty[$, il me suffit donc de trouver n'importe quel nombre de cet intervalle qui a une image supérieure à A et de choisir cette valeur pour x_0 pour être sorti d'affaire.
mais comment trouver ce x_0 ???
en tout cas une chose est sure, vu la courbe en U que nous avons, on doit prendre nécessairement un x_0 positif (sinon on finit par passer sous A, avant d'atteindre 0 , puis de remonter au-dessus de A)
voyons voir : $x^4 > A$, si j'applique la racine carrée …. Ça conserve l'ordre donc :
$x^4 > A$ donc $\sqrt{x^4} > \sqrt{A}$ donc $x^2 > \sqrt{A}$ appliquons encore cette racine $\sqrt{x^2} > \sqrt{\sqrt{A}}$ donc $x > \sqrt{\sqrt{A}}$

Donc du moment que $x > \sqrt{\sqrt{A}}$ ça devrait marcher …. Attention ça c'est de l'intuition, on cherche juste une valeur buttoir, la démonstration arrive maintenant :

Prenons $\mathbf{x_0} = \sqrt{\sqrt{\mathbf{A}}}$, je veux maintenant montrer que $\forall x > x_0, f(x) > A$

soit $\mathbf{x > x_0}$, f est croissante sur $]\mathbf{0}; +\infty[$ donc $\mathbf{f(x) > f(x_0)}$ donc $\mathbf{f(x) > f(\sqrt{\sqrt{A}})}$ donc $\mathbf{f(x) > \sqrt{\sqrt{A}}^4}$
donc $\mathbf{f(x) > A}$ donc $\forall x > x_0, f(x) > A$

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x > x_0, f(x) > A$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

Comment [J1]: en effet on a démontré que $f(x) > A$ avec un x plus grand que x_0 sans autre condition, si c'est valable pour lui ça le sera donc pour tous les x plus grand que x_0

Comment [J2]: idem: on a fait la démonstration pour un A quelconque (avec une disjonction des cas : A<0 et A≥ 0) , ça marchera donc avec tous les réels A

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ avec $f(x) = x^3$

Montrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Soit A un réel

Si A est positif, vu l'allure de la courbe en prenant $x_0 = 0$ ça devrait fonctionner

prenons $x_0 = 0$, soit x un réel tel que $x < x_0$, vu que $f(x) = x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ on aura : $f(x) < f(x_0)$ donc $f(x) < 0$ or 0<A donc $f(x) < A$ donc $\forall x < x_0, f(x) < A$

Si A est négatif ou nul

comment trouver un bon x_0 ? Passer par la racine cubique est une solution, il faut être vigilant au signes, et sincèrement c'est une voie pénible.

Considérons une autre approche : on ne cherche pas LE MEILLEUR x_0 mais un x_0 qui fait l'affaire

regardons le graphique si A vaut -10 un x_0 valable est -3 et aussi toute valeur plus petite que -3

si A vaut -100 un x_0 valable est -5 et aussi toute valeur plus petite que -5 … on ne voit pas de lien entre le A et le x_0.

une idée : et si on prenait $x_0 = A$, pour les deux valeurs au-dessus ça semble coller. Mais est-ce que c'est tout le temps vrai ?

est ce qu'on a toujours $x_0^3 < A$ autrement dit a-t-on toujours $A^3 < A$?

résolvons l'inéquation : $A^3 - A < 0 \Leftrightarrow A(A^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow A(A+1)(A-1) < 0$ dans le membre de gauche A est négatif et donc A-1 aussi , donc A(A-1) est positif, donc en divisant par A(A-1) on obtient : $\Leftrightarrow A(A+1)(A-1) < 0$ $\Leftrightarrow (A+1) < 0 \Leftrightarrow A < -1$

Ainsi si $A < -1$ il me suffit de prendre $x_0 = A$. Rédigeons ça avant de s'occuper du dernier cas de figure

si $A < -1$, je prend $x_0 = A$

soit x un réel vérifiant $x < x_0$, on aura alors $f(x) < f(x_0)$ donc $f(x) < A^3$ (f étant croissante)

montrons que $A^3 < A$ en étudiant le signe de $A^3 - A$.

$A^3 - A = A(A^2 - 1) = A(A+1)(A-1)$ vu que $A < -1$ on aura : $A < 0$, $A + 1 < 0$ et $A - 1 < 0$ donc par règle des signes : $A^3 - A < 0$ donc $A^3 < A$

comme on avait $f(x) < A^3$ on peut en déduire que : $f(x) < A$ donc $\forall x < x_0, f(x) < A$

Et dans le cas contraire, c'est-à-dire si $-1 \leq A \leq 0$, que se passe t il ? vu que x^3 est croissante et que $(-1)^3 = -1$ on pourra prendre $x_0 = -1$ et ça fera l'affaire

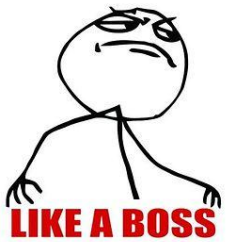
si $-1 \leq A \leq 0$, je prend $x_0 = -1$

soit x un réel vérifiant $x < x_0$, on aura alors $f(x) < f(x_0)$ donc $f(x) < -1$ (f étant croissante)

donc $f(x) < A$ donc $\forall x < x_0, f(x) < A$

On a couvert tous les A possibles, on a donc : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x < x_0, f(x) < A$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$



3) Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Soit A un réel

si A est négatif ou nul, alors $\forall x > 0$ **on aura :** $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \geq A$

donc $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in]0; \varepsilon[, \frac{1}{\sqrt{x}} > A$ **et donc** $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]0; \varepsilon[, \frac{1}{\sqrt{x}} > A$ (et oui si ça marche tout le temps on peut dire que ça marche au moins une fois)

Si A est positif

on veut trouver un ε **tel que** , $\forall x \in]0; \varepsilon[, \frac{1}{\sqrt{x}} > A$

En prenant $x > 0$ **on aura** $\frac{1}{\sqrt{x}} > A \Leftrightarrow \frac{1}{A} > \sqrt{x}$ **=>** $\frac{1}{A^2} > x$ (on a utilisé la croissance de la fonction carré)

On pose$\varepsilon = \frac{1}{A^2}$**,**

soit x un réel vérifiant $x \in]0; \varepsilon[$ **donc** $0 < x < \varepsilon$ **donc** $\sqrt{x} < \sqrt{\varepsilon}$ **donc** $\sqrt{x} < \sqrt{\frac{1}{A^2}}$ **donc** $\sqrt{x} < \frac{1}{A}$ **donc** $\frac{1}{\sqrt{x}} > A$

si c'est vrai pour un des x quelconque de l'intervalle , ça sera valable , $\forall x \in]0; \varepsilon[$

Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in]0; \varepsilon[, \frac{1}{\sqrt{x}} > A$

conclusion : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

4) montrons que si $\lim_{x \to c^+} f(x) = l$ et $\lim_{x \to c^+} g(x) = l'$ alors $\lim_{x \to c^+} f(x) + g(x) = l + l'$

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe un réel x_0 à partir duquel on ait : $\left|\left(f(x) + g(x)\right) - (l + l')\right| < \varepsilon$

je pose $r = \frac{\varepsilon}{2}$ Vu que $\lim_{x \to c^+} f(x) = l$, $\exists \eta_1 > 0, \forall x \in]c, c + \eta_1[, |f(x) - l| < r$

Vu que $\lim_{x \to c^+} g(x) = l'$, $\exists \eta_2 > 0, \forall x \in]c, c + \eta_2[, |g(x) - l'| < r$

si je prend $\eta = \min(\eta_1; \eta_2)$ on aura : $]c, c + \eta[\subset]c, c + \eta_1[$ et $]c, c + \eta[\subset]c, c + \eta_2[$

je prend $x \in]c, c + \eta[$ donc $x \in]c, c + \eta_1[$ et $x \in]c, c + \eta_2[$ donc $|f(x) - l| < r$ et $|g(x) - l'| < r$

donc $|f(x) - l| + |g(x) - l'| < 2r$ donc $|f(x) - l| + |g(x) - l'| < \varepsilon$

de plus comme pour tous réels a et b on a $|a + b| \leq |a| + |b|$ on aura $|(f(x) - l) - (g(x) + l')| < \varepsilon$

donc $\left|\left(f(x) + g(x)\right) - (l + l')\right| < \varepsilon$

Conclusion :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]c, c + \eta[, \left|\left(f(x) + g(x)\right) - (l + l')\right| < \varepsilon$ autrement dit $\lim_{x \to c^+} f(x) + g(x) = l + l'$

<u>Remarque</u> : les lettre r, η et ε sont dédiées aux rayons et écarts, elles sont généralement associées à des réels positifs

5) erreur d'élève et analyse par Gaëlle Chayne et Julien Kergot

Le but est de prouver que :

Si au voisinage de $+\infty$ on a $g(x) \geq f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **alors** on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Proposition d'élève :

Pour tout A appartenant à R, il existe x1 appartenant à R tel que pour tout x > ou égal à x1 , f(x) >A

Comme f(x) < ou égale à g (x), pour tout x > ou égal à x1, g(x) > A

Donc vu que lim f(x) = + l'infini alors lim g (x) = + l'infini
x---> + l'infini x---> + l'infini

Réponse du prof :

Primo : écrit les données au début :

Donc vu que lim f(x) = + l'infini
x---> + l'infini

n'a rien à faire là où tu l'as écrit, cette hypothèse a été utilisée plus haut quand tu as écrit (sans justifier):

Pour tout A appartenant à R, il existe x1 appartenant à R tel que pour tout x > ou égal à x1 , f(x) >A

Secundo : pour revenir à ce que j'ai cité juste avant , ton but est de montrer que tu as une propriété analogue pour la fonction g. Si tu veux montrer que c'est valable pour tout A, comme je l'ai déjà dit 50 fois, tu dois fixer un A quelconque et montrer que c'est valable pour LUI.
Donc tu fixes le A, la limite de f te donne l'existence d'un x1 particulier lié au A que tu as fixé à partir duquel tu as f(x)>A
Maintenant tu dois trouver x0 à partir duquel tu auras g(x)>A

tertio : pour le max, il se trouve que l'on a dans les hypothèse que g>f au voisinage de +infini et non tout le temps, ce qui veut dire que tu as l'existence d'un B tel que g(x) > f(x) pour tout x de [B; +infini[
imagine maintenant un peu que tu as trouvé plus haut un x1 plus petit que B.
si tu prends un x entre x1 et B tu as bien , mais tu n'as pas nécessairement g(x)>f(x) donc tu ne peux être sure que g(x) >A
c'est pour cela qu'il est impératif que tu prennes un x0 qui soit après (ou égal) à x1 ET à B (comme ça tu auras les deux inégalités f(x) >A et g(x)>f(x) qui permettrons de conclure que g(x) >A

6) démonstrations (DM du 22/9)

Théorème

Si au voisinage de $+\infty$ on a $g(x) \geq f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **alors** on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Démonstration

Soit A un réel, montrons qu'il existe une valeur à partir de laquelle g(x) sera toujours supérieure à A

Au voisinage de $+\infty$ on a $g(x) \geq f(x)$ ce qui veut dire $\exists D \in \mathbb{R}, \forall x \geq D, g(x) \geq f(x)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x > x_0, f(x) > A$
On pose $x_1 = \max(D, x_0)$, $\forall x > x_1$ on a :
$x > D$ et donc $g(x) \geq f(x)$
$x > x_0$ et donc $f(x) > A$ donc : $g(x) \geq f(x) > A$ donc $g(x) > A$

Conclusion : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_1 \in \mathbb{R}, \forall x > x_1, g(x) > A$ autrement dit : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Théorème

Soient a, b et c trois réels
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ **alors** $\lim\limits_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ mon but est de montrer qu'il existe un voisinage de a dans lequel on ait $g(y) \in]c - \varepsilon; c + \varepsilon[$

$\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ donc $\exists r > 0, \forall y \in]b - r; b + r[, g(y) \in]c - \varepsilon; c + \varepsilon[$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ donc $\exists \eta > 0, \forall x \in]a - \eta; b + \eta[, f(x) \in]b - r; b + r[$

Ainsi $\forall x \in]a - \eta; b + \eta[, f(x) \in]b - r; b + r[$ et donc $g\big(f(x)\big) \in]c - \varepsilon; c + \varepsilon[$ CQFD