Corrections

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x-1} = ?$

$\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = x\frac{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$ donc par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x-1} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1000}{x^2+x} = ?$

$\frac{x+1000}{x^2+x} = \frac{x\left(1+\frac{1000}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}\frac{1+\frac{1000}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1000}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$ donc par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x-1} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2+x+1} - x = ?$

$\frac{x^3}{x^2+x+1} - x = \frac{x^3}{x^2+x+1} - \frac{x(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \frac{-x^2-x}{x^2+x+1} = \frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2+x+1} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{x+1} = ?$

$f(x) = \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^3(x+1)}{(2x^2-1)(x+1)} - \frac{x^2(2x^2-1)}{(x+1)(2x^2-1)} = \frac{x^4+x^3}{2x^3+2x^2-x-1} - \frac{2x^4-x^2}{2x^3+2x^2-x-1} = \frac{-x^4+x^3+x^2}{2x^3+2x^2-x-1} = \frac{x^4\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$

$= x\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$ or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ donc par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{x+1} = -\infty$

Autre approche : en utilisant la division euclidienne : $\frac{x^3}{2x^2-1} = \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}x}{2x^2-1}$ et $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ et donc $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{2x^2-1} - \frac{1}{x+1}$ qui tends vers $-\infty$ (les deux quotients tendent vers 0)

5) comme au 4)

6) chaque parenthèse à la puissance 10 donnera une fois développée $x^{10} + des\ termes\ de\ degrés\ moindres$

Donc le numérateur sera $100x^{10} + ax^9 + bx^8 + \cdots$ une fois factorisé on aura : $x^{10}\left(100 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \cdots\right)$

Au dénominateur on aura , une fois factorisé, l'expression suivante : $x^{10}\left(1 + \frac{10^{20}}{x^{10}}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}\left(100+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\cdots\right)}{x^{10}\left(1+\frac{10^{20}}{x^{10}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(100+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\cdots\right)}{\left(1+\frac{10^{20}}{x^{10}}\right)} = 100$$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x-4} = ?$

$\frac{\sqrt{x+5}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{5}{x}}}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{1+\frac{5}{x}}}{1-\frac{4}{x}}$ or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x}}}{1-\frac{4}{x}} = 1 \end{cases}$ donc par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x-4} = 0$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1} - 2x = ?$

$f(x) = \sqrt{x^2+x-1} - 2x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} - 2x = \sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} - 2x$

Avec x>0 $f(x) = x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} - 2x = x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} - 2\right)$

or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} - 2 = -1 \end{cases}$ donc par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1} - 2x = -\infty$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1} - x = ?$

$$f(x) = \sqrt{x^2+x-1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x-1}+x} = \frac{x^2+x-1-x^2}{\sqrt{x^2+x-1}+x} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1}+x}$$

Avec x>0 $f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+1}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+1} = \frac{1}{2}$

10) avec x>0 $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}} - x = \sqrt{x^2+x^2\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}} - x = \sqrt{x^2\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)} - x = x\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}} - x$

$= x\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}} - 1\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{5}{x^2}} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}} = 2$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}} - 1 = 1$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}} - x = +\infty$

11)si x>0 $\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{x} = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{x}\right) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{x}\right)$

or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{x}\right) = -\infty \end{cases}$ donc par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x} = -\infty$

12) avec x>0 $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3}=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3}}=\frac{x^2+2x-(x^2+3)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$

$=\frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{2}{2}=1$

13)

Avec x>0 $\frac{\sqrt{x^2+4}+2x-\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x^2+x+7}}=\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+2-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}\right)}=\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+2-\frac{\sqrt{x}}{x}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+2x-\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x^2+x+7}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+2-\frac{\sqrt{x}}{x}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{3}{2}$

Fiche de M. Foureson

<u>Exercice 15</u> : Soit f et g deux fonctions définies sur ℝ par : f (x) = x^3 et g(x) = $x^2 + 2$
Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = g(x) .

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3=x^2+2 \Leftrightarrow x^3-x^2-2=0 \Leftrightarrow h(x)=0$ si on a posé $h(x)=x^3-x^2-2$
$h'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$
donc h est croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[\frac{2}{3};+\infty[$, elle est décroissante sur $[0;\frac{2}{3}]$.
$h(0)=-2$ et h est croissante sur $]-\infty;0]$ donc $\forall x\in]-\infty;0], h(x)\leq -2$
$h(0)=-2$ et h est décroissante sur $[0;\frac{2}{3}]$ donc $\forall x\in[0;\frac{2}{3}]$, $h(x)\leq -2$
$h(5)=98$ et h est croissante sur $[\frac{2}{3};+\infty[$ donc $\forall x\in[5;+\infty[$, $h(x)\geq 98$
ainsi $h(x)=0$ n'a pas de solution sur $]-\infty;\frac{2}{3}]$ ni sur $[5;+\infty[$
$h\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{58}{27}$ et $h(5)=98$, de plus h est continue et croissante sur $\left[\frac{2}{3};5\right]$ donc d'après le théorème de la bijection on aura une solution unique à l'équation $h(x)=0$ sur $\left[\frac{2}{3};5\right]$.
Vu qu'il n'y a pas d'autre solution ailleurs, $h(x)=0$ n'a qu'une solution dans ℝ.

<u>Exercice 16</u> : Montrer que l'équation $x^3-\frac{x^2}{2}-6x+\frac{58}{6}=0$ admet une unique solution réelle que l'on notera α et on donnera un encadrement à l'aide de deux entiers consécutifs.

On pose $h(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-6x+\frac{58}{6}$, on a donc $h'(x)=2x^2-x-6$
$\Delta=1-4\times2\times(-6)=49$ donc $x_1=\frac{1-7}{6}=-1$ et $x_2=\frac{1+7}{6}=\frac{4}{3}$ et donc on a $h'(x)=(x+1)\left(x-\frac{4}{3}\right)$
Donc h est croissante sur $]-\infty;x_1]$ et sur $[x_2;+\infty[$, elle est décroissante sur $[x_1;x_2]$

$h(x_2)>0$ et h décroissante sur $[x_1;x_2]$ donc $\forall x\in[x_1;x_2], h(x)>h(x_2)>0$ et

$h(x_2)>0$ et h est croissante sur $[x_2;+\infty[$ $\forall x\in[x_1;x_2], h(x)>h(x_2)>0$

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$(facile mais à détailler en évaluation) , $h(x_1) > 0$, h est continue et croissante sur $]-\infty; x_1]$ donc d'après l'extension du théorème de la bijection on a une solution unique à l'équation $h(x) = 0$

En utilisant un tableau de valeur sur la calculatrice ou la représentation graphique on a comme encadrement à l'unité de α : $-3 < \alpha < -2$