LE SECOND DEGRE

I. Fonctions polynômes

Définition :
On appelle fonction monôme une fonction qui à tout réel x associe ax^n avec a réel non nul et n entier naturel. L'entier naturel n est appelé degré du monôme.

Remarques

Les fonctions constantes sont des monômes de degré 0.
Les fonctions linéaires ($x \to ax$ avec $a \neq 0$) sont des monômes de degré 1.
La fonction carré est un monôme de degré 2.
On appelle fonction polynôme une somme de monômes.
Le degré d'un polynôme est le degré de son monôme de plus haut degré.

Exemples
La fonction f définie par $f(x) = x^3 - 5x + 1$ est un polynôme de degré 3.
Les fonctions affines de coefficient directeur non nul sont des polynômes de degré 1.

II Equation du second degré.

Définition 1 :
Une <u>équation du second degré</u> x en x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

<u>Exemples :</u>
L'équation $(x - 3)^2 + 4 = 0$ est équivalente à $x^2 - 6x + 13 = 0$, c'est donc une équation du second degré dans laquelle $a = 1$, $b = -6$ et $c = 13$.
L'équation $(x + 5)^2 - (x + 2)(x + 4)$ est équivalente à $4x + 13 = 0$, ce n'est donc pas une équation du second degré car $a = 0$.
Autres équations du second degré : $x^2 + 9 = 0$; $5x^2 - 6x = 0$.

Définition 2
Tout trinôme du second degrés $ax^2 + bx + c$ peut être écrit sous la forme $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$. Cette écriture est appelée forme canonique du trinôme.

Démonstration

$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + x\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right]$ Je factorise par a (pour éviter de les racines dans la suite)

$$= a\left[x^2 + \underbrace{2x\frac{b}{2a}}_{double\ produit} + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}_{le\ carré\ et\ sa\ compensation} + \frac{c}{a}\right]$$

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$ je factorise mon identité remarquable

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$ je mets au même dénominateur

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ J'ajoute mes deux fractions

Définition 3 :
On appelle <u>discriminant</u> de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$), et on note Δ, le nombre défini par :

$\Delta = b^2 - 4ac$

Remarque :
La forme canonique sera donc : $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

<u>Exemple :</u>
Le discriminant de l'équation $x^2 - 8x + 19 = 0$ est le nombre Δ tel que :
$\Delta = (-8)^2 - 4\times1\times19 = 64 - 76 = -12$

Conséquence
$f(x) = ax^2 + bx + c$ atteint son extremum pour $x = -\frac{b}{2a}$ et il vaut : $-\frac{\Delta}{4a}$
C'est un minimum si $a > 0$ un maximum si $a < 0$

Démonstration

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2}$

Si a>0 $\quad \Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \geq -a\frac{\Delta}{4a^2}$
$\Leftrightarrow f(x) \geq \frac{-\Delta}{4a}$
Donc $\frac{-\Delta}{4a}$ est un minorant de f

Si a<0 $\quad \Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \leq -a\frac{\Delta}{4a^2}$
$\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{-\Delta}{4a}$
donc $\frac{-\Delta}{4a}$ est un majorant de f

Comme il est atteint en $-\frac{b}{2a}$

$\frac{-\Delta}{4a}$ est Le minimum de f $\qquad$ $\frac{-\Delta}{4a}$ est Le maximum de f

<u>III Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$</u>

L'existence des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de discriminant Δ.
Nous admettrons ici les résultats suivants :

<u>Théorème :</u>

Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$.	
Lorsque $\Delta < 0$	L'équation n'a pas de solution.
Lorsque $\Delta = 0$	L'équation a une solution (dite racine double) $x_0 = \frac{-b}{2a}$
Lorsque $\Delta > 0$	L'équation a deux solutions distinctes :$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

<u>Exemple 1 :</u>
$x^2 - 3x = -4$
Ecrivons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$
$x^2 - 3x + 4 = 0$
Ici $a = 1$, $b = -3$ et $c = 4$.
$\Delta = b^2 - 4ac \quad = (-3)^2 - 4\times1\times4 \quad = 9 - 16 \quad = -7$
$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution : $S = \{\emptyset\}$

<u>Exemple 2 :</u>
$3x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{48} = 0$
$\Delta = \frac{49}{4} - 4\times3\times\frac{49}{48} = \frac{49}{4} - \frac{4\times3\times49}{4\times3\times4} = \frac{49}{4} - \frac{49}{4} = 0$
$\Delta = 0$ donc l'équation admet une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$ c'est-à-dire $x_0 = \frac{-\frac{7}{2}}{6} = -\frac{7}{12}$ $\qquad S = \left\{\frac{7}{12}\right\}$

IV Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses.

Soit P une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
Il n'est pas possible d'avoir une idée précise de cette parabole mais nous pouvons la situer par rapport à l'axe des abscisses.
En effet :

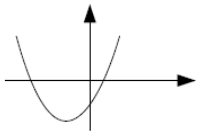
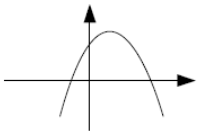
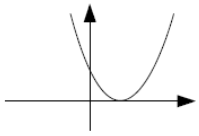
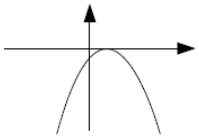
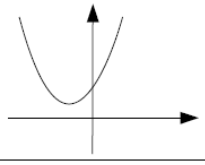
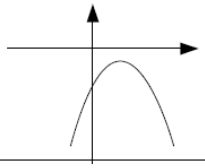
- lorsque $\Delta \geq 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a des solutions, donc la parabole P rencontre l'axe des abscisses.
- lorsque $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution, donc la parabole P ne rencontre pas l'axe des abscisses.

De plus nous admettrons le résultat suivant :

- si $a > 0$, la parabole P est "tournée vers le haut".
- si $a < 0$, la parabole P est "tournée vers le bas".

(voir TP Courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2)

Le tableau suivant donne toutes les situations possibles d'une parabole P par rapport à l'axe des abscisses selon les signes de Δ et de a.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

V Factorisation d'un trinome du second degré.

Nous admettons le théorème suivant :

Théorème :
Considérons le trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

- Lorsque ce trinôme a deux racines x_1 et x_2, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Lorsque ce trinôme a une seule racine x_0, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Lorsque ce trinôme n'a pas de racine il ne peut pas être factorisé.

<u>Exemple :</u>
Considérons le trinôme f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x - 4$.
Résolvons $f(x) = 0$.
$3x^2 - x - 4 = 0$
$\Delta = 1 - 4 \times (-12) \quad = 1 + 48 \quad = 49$
f possède deux racines $x_1 = \frac{1-7}{6} = -1$ et $x_2 = \frac{1+7}{6} = \frac{4}{3}$
Donc pour tout réel x, $f(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$.

VI inéquations du second degré

Soit P(x) un polynôme du second degré de discriminant Δ

Si Δ> 0 P(x) est du signe de a en dehors des racines c'est-à-dire quand $x < x_1$ ou que $x > x_2$. P(x) sera du signe contraire à celui de a si on est entre les racines $x_1 < x < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Si Δ= 0 P(x) est du signe de a sauf en $-\frac{b}{2a}$ ou il s'annule

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

Si Δ< 0 P(x) est toujours du signe de a.

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

Pour résumer $ax^2+bx+c = 0$ est du signe a sauf quand Δ>0 et que x est compris entre x_1 et x_2.

VII interprétation graphique des solutions de l'équation $ax^2+bx + c = 0$

De manière générale considérons l'équation $ax^2 + bx + c= 0$ avec $a \neq 0$

Notons f la fonction trinôme du second degré : $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c= 0$ sont les nombres x tels que f(x) = 0, ces nombres sont aussi appelés <u>racines du trinôme</u> du second degré f.

Notons P la parabole représentant f dans un repère choisi.

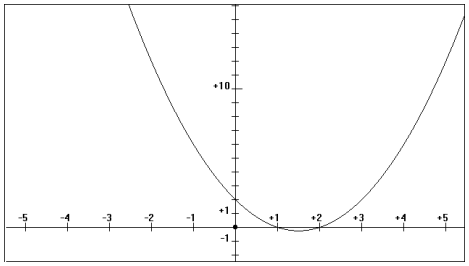
<u>Graphiquement</u> les solutions de $ax^2 + bx + c= 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la parabole P avec l'axe des abscisses.

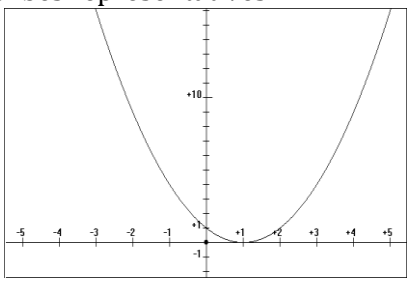
<u>Exemples :</u>

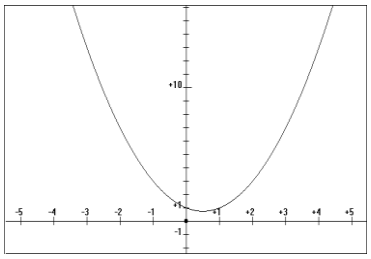
Considérons les fonctions trinômes f, g et h définies respectivement, pour tout réel x par :

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\qquad$ $g(x) = (x - 1)^2$ $\qquad$ $h(x) = x^2 - x + 1$

Notons respectivement C_f, C_g et C_h leurs courbes représentatives.







C_f coupe l'axe des abscisses en 2 points. $\qquad$ L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet 2 solutions : 1 et 2

C_g coupe l'axe des abscisses en un point. $\qquad$ L'équation $(x - 1)^2 =0$ a une solution : 1

C_h ne coupe pas l'axe des abscisses. $\qquad$ L'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution.

Retrouvons ces résultats par le calcul :

f(x) = 0	g(x) = 0	h(x) = 0
$x^2 - 3x + 2 = 0$	$(x - 1)^2 = 0$	$x^2 - x + 1 = 0$
$\Delta = 9 - 8 = 1$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$\Delta = 1 - 4 = -3$
$x_1 = \frac{3-1}{6} = -1, x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$	$\Delta = 4 - 4 = 0$	$S = \varnothing$
$S = \{1 ; 2\}$	$x_0 = \frac{2}{2} = 1$	
	$S = \{1\}$	