Exercice 109P117

Partie A

1) $u_1 = 0{,}6u_0 + 200 = 0{,}6 \times 900 + 200 = 740$
   $u_2 = 0{,}6u_1 + 200 = 0{,}6 \times 740 + 200 = 644$
2) Utilisation de la suite auxiliaire v_n
   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 0{,}6u_n + 200 - 5000 = 0{,}6u_n - 300$
   b. $v_{n+1} = 0{,}6u_n - 300 = 0{,}6(u_n - 500) = 0{,}6v_n$
   c. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,6 de plus $v_0 = u_0 - 500 = 400$
   d. $v_n = 400 \times 0{,}6^n$, or $v_n = u_n - 500$, donc $u_n = v_n + 500 = 400(0{,}6)^n + 500$
   e. (v_n) étant une suite géométrique de premier terme et de raison positive et sa raison étant plus petite que 1, elle est décroissante, donc pour tout entier naturel n on a : $v_{n+1} < v_n$ et donc $v_{n+1} + 500 < v_n + 500$ et donc $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est décroissante.

Partie B

1) Comparaison directe et formalisation
   a. La société A garde 80% de son ancienne clientèle et récupère 20% de celle de la société B (qui possédait le reste des clients par rapport à 1000).
      On a donc en 2011 : $\frac{80}{100}900 + \frac{20}{100}100 = 740$
      En 2012 : $\frac{80}{100}740 + \frac{20}{100}(1000 - 740) = \frac{80}{100}740 + \frac{20}{100}260 = 644$
   b. En l'an 2010+n , la société A a_n clients et la société B a 1000 - a_n clients, donc en l'an 2010+(n+1) la société A aura $a_{n+1} = \frac{80}{100}a_n + \frac{20}{100}(1000 - a_n) = 0{,}8a_n + 0{,}2(1000 - a_n) = 0{,}8a_n - 200 - 0{,}2a_n = 0{,}6a_n - 200$
   c. D'après ce que l'on a pu voir à la partie A, on a : $a_n = 400 \times 0{,}6^n + 500$
2) Propriétés de (a_n)
   a. $400 \times 0{,}6^n > 0$ en tant que produit d'éléments strictement positifs, donc $400 \times 0{,}6^n + 500 > 500$ et donc $a_n > 500$
   b. On sait que (a_n)est décroissante et que $a_{11} = 400 \times 0{,}6^{11} + 500 \approx 501{,}451$
      donc $a_{11} < 502$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 11 $a_n < 502$
   c. On peut en déduire qu'en dix ans les deux entreprises vont se retrouver à avoir à peu près le même nombre de client.

Exercice 137P123

1) Premiers termes
   a. En 2011 on aura $\frac{80}{100}25\,000 + 20\,000 = 20\,000 + 20\,000 = 40\,000$
   b.

D2 | f_x =0,8*C2+20000

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année n	0	1	2	3	4	5
2	abonnés	25000	40000	52000	61600	69280	75424

   c. La formule serait pour une case donnée: =nom de la case juste à gauche * 0,8 +20 000, par exemple pour D2 j'écris : =0,8*C2+20000
2) Formalisation : création de la suite (U_n)
   a. $U_0 - U_1 = 15000$ et $U_1 - U_2 = 12000$ donc on ne passe pas d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité, la suite n'est pas arithmétique.
   b. $\frac{U_1}{U_0} = 1{,}6$ et $\frac{U_2}{U_1} = 1{,}3$ donc on ne passe pas d'un terme au suivant en multipliant par la même quantité.
   c. La suite (U_n) est définie par : $\begin{cases} U_0 = 25000 \\ U_{n+1} = 0{,}8U_n + 20000 \end{cases}$
3) Nouvelle suite : (V_n)
   a. $V_0 = 100\,000 - U_0 = 75\,000$
   b. Voir tableau
4) Nature de (V_n)
   a. Voir tableau
   b. (V_n) a l'aire bien géométrique de raison 0,8.

Année n	0	1	2	3	4	5
abonnés	25000	40000	52000	61600	69280	75424
$\boldsymbol{V_n}$	75000	60000	48000	38400	30720	24576
$\boldsymbol{\frac{V_n}{V_{(n-1)}}}$		0,8	0,8	0,8	0,8	0,8

   c. En admettant la conjecture précédente on a : $V_n = V_0 \times 0{,}8^n = 75\,000 \times 0{,}8^n$
5) Nouvelle formule de (U_n)
   a. On sait que $V_n = 100\,000 - U_n$ donc $U_n = 100\,000 - V_n = 100\,000 - 75\,000 \times 0{,}8^n$
   b. En 2020, n=10 donc on aura $U_{10} = 100000 - 75000 \times 0{,}8^{10} \approx 91946{,}93632$ abonnés